



NOTAS DE ELECTROMAGNETISMO

Amaro Rica da Silva

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, LISBOA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

© 20 DE FEVEREIRO, 2020

500px

500px.com/photo/5055913



Sumário

Conteúdo
Lista de Figuras
Lista de Tabelas



Conteúdo

I Sumário

Conteúdo	5
Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	12

II Introdução

1	Programa	17
1.1	Organização e Funcionamento	17
1.2	Programa	18
1.3	Propriedades da carga elétrica.	22
1.4	A experiência de Millikan.	22
1.5	Como é que se distribuem as cargas nos condutores e isolantes?	23
1.6	Cargas Elementares	24
1.7	Comparação entre força elétrica e força gravitacional.	25
1.8	Interações fundamentais e escalas.	26
1.9	Indução elétrica em condutores	26
1.10	Indução elétrica em isolantes e polarização	27
1.11	Tribo-eletricidade e indução elétrica	27
2	Álgebra e Vetores	29
2.1	Vetores, versores e cossenos diretores	30

2.2	Produto Escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$	31
2.3	Produto Vetorial: $\vec{a} \times \vec{b}$	34
2.4	Produto Vetorial Triplo: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$	35
2.5	Produto Misto: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}$	35
2.6	Coordenadas Polares	37
2.7	Cálculo com vectores	38
2.8	Operadores Diferenciais em Coordenadas Cartesianas	43
2.9	Operadores Diferenciais em Coordenadas Curvilíneas	55
2.10	Exercícios	65
3	Formulas	69
3.1	Identidades Matemáticas	69
4	Introdução, Historial e Unidades	73
4.1	Interação à distância versus Forças de Contacto	73
4.2	O Campo de uma Fonte Pontual	75

III

Eletrostática

5	Eletrostática	83
5.1	Caracterização da Carga Elétrica	84
5.2	Campo Elétrico e Lei de Coulomb	85
5.3	Transformação do Campo Eletromagnético	93
5.4	Linhas de Campo e Equipotenciais	94
5.5	Lei de Gauss	100
5.6	Condutores: Propriedades Eletrostáticas	106
5.7	O potencial escalar V do campo eletrostático $\vec{E} = -\nabla V$	108
5.8	Determinação do campo eletrostático a partir do cálculo do potencial ϕ .	113
5.9	Equação de Poisson	124
5.10	Solução exata pelo método de imagens	139
5.11	Condensadores e Capacidade	142
5.12	Energia Eletrostática em Condensadores	146
5.13	Densidade de Energia Electrostática	148
6	Eletrostática na Matéria	151
6.1	Campo Elétrico na Matéria: Não-Condutores ou Dielétricos	152
6.2	Capacidade e Condensadores	160
6.3	Campo Elétrico na Matéria: Condutores e Corrente Elétrica Estacionária.	169
6.4	Lei de Ohm: $\vec{J} = \sigma_e \vec{E}$	173

IV

Magnetostatica

7	Magnetismo	181
7.1	Forças Eletromagnéticas entre cargas e campos	182
7.2	Densidade de Fluxo Magnético \vec{B} criado por $q_1 \vec{v}$	184
7.3	Força Magnética em condutores e correntes:	185
7.4	Lei de Biot-Savart:	186
7.5	Aplicações da Lei de Biot-Savart	194
7.6	Lei de Ampère:	196
7.7	O Efeito de Hall	201
7.8	Força Magnética em condutores e correntes:	202
7.9	Momento Magnético e Binários de Força em condutores e correntes	207
8	Indução Magnética e Campos na Matéria	211
8.1	Lei de Faraday e Lei de Lenz	212
8.2	Lei de Ampère Geral : $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	218
8.3	Energia no campo magnético	219
8.4	Potencial Vetor na Gauge de Lorentz $\nabla \cdot \vec{A} = 0$	227
8.5	Campo magnético \vec{H} na matéria :	228

V

Ótica Ondulatória

9	Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas	247
9.1	Equações de Maxwell em forma integral	248
9.2	Equações de Maxwell microscópicas	249
9.3	Solução de Ondas Planas	253
9.4	Equações de Fresnel	264
9.5	Alteração de fase na reflexão	270
9.6	Interferência de duas ondas: Experiência de Young	271
9.7	Redes de difração	274
9.8	Critério de Rayleigh	276
9.9	Princípio de Huygens (1660)	277
9.10	Difração de Fraunhofer	277

VI

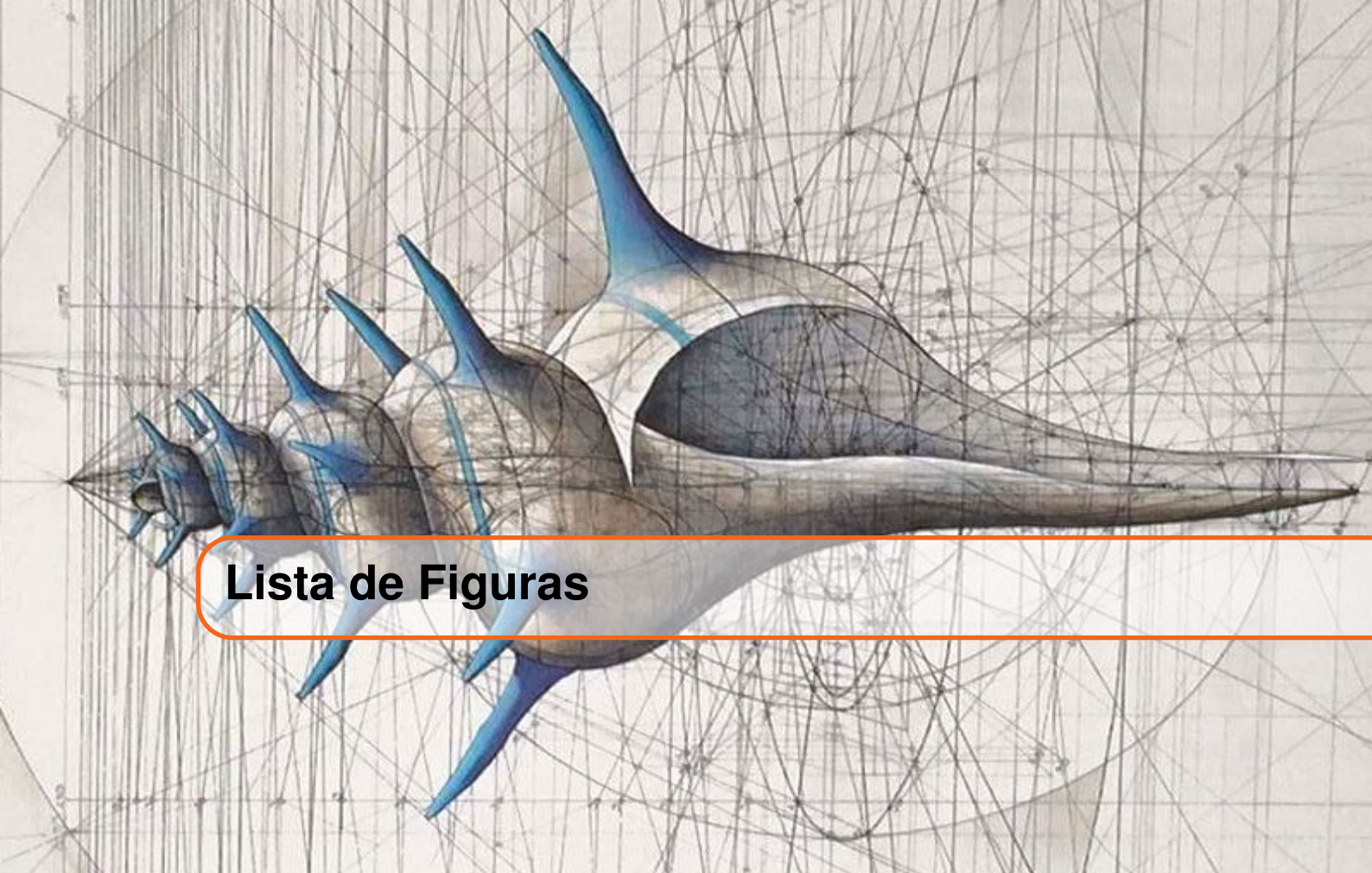
Ótica Geométrica

10	Espelhos, Lentes e Ótica Geométrica	283
10.1	Espelhos	283
10.2	Lentes	289

10.3	Telescópio Galileano	297
10.4	Telescópio Newtoniano	297
10.5	Abertura circular	298

VII**Apêndices**

A	Problemas	303
A.1	Formalismo Geral	305
A.2	Electroestática	306
A.3	Magnetoestática	310
A.4	Força Eletromotriz e Fluxos	313
A.5	Campos Variáveis e Corrente de Deslocamento	316
A.6	Problemas de Potencial e Equação de Poisson	317
A.7	Radiação e Campo Eletromagnético	318
A.8	Correntes Elétricas e Forças	320
A.9	Condições Fronteira	323
A.10	Correntes e Campos	324
A.11	Ondas Eletromagnéticas	326
B	Bibliografia	329
	Artigos	329
	Livros	329
	Coletâneas	331



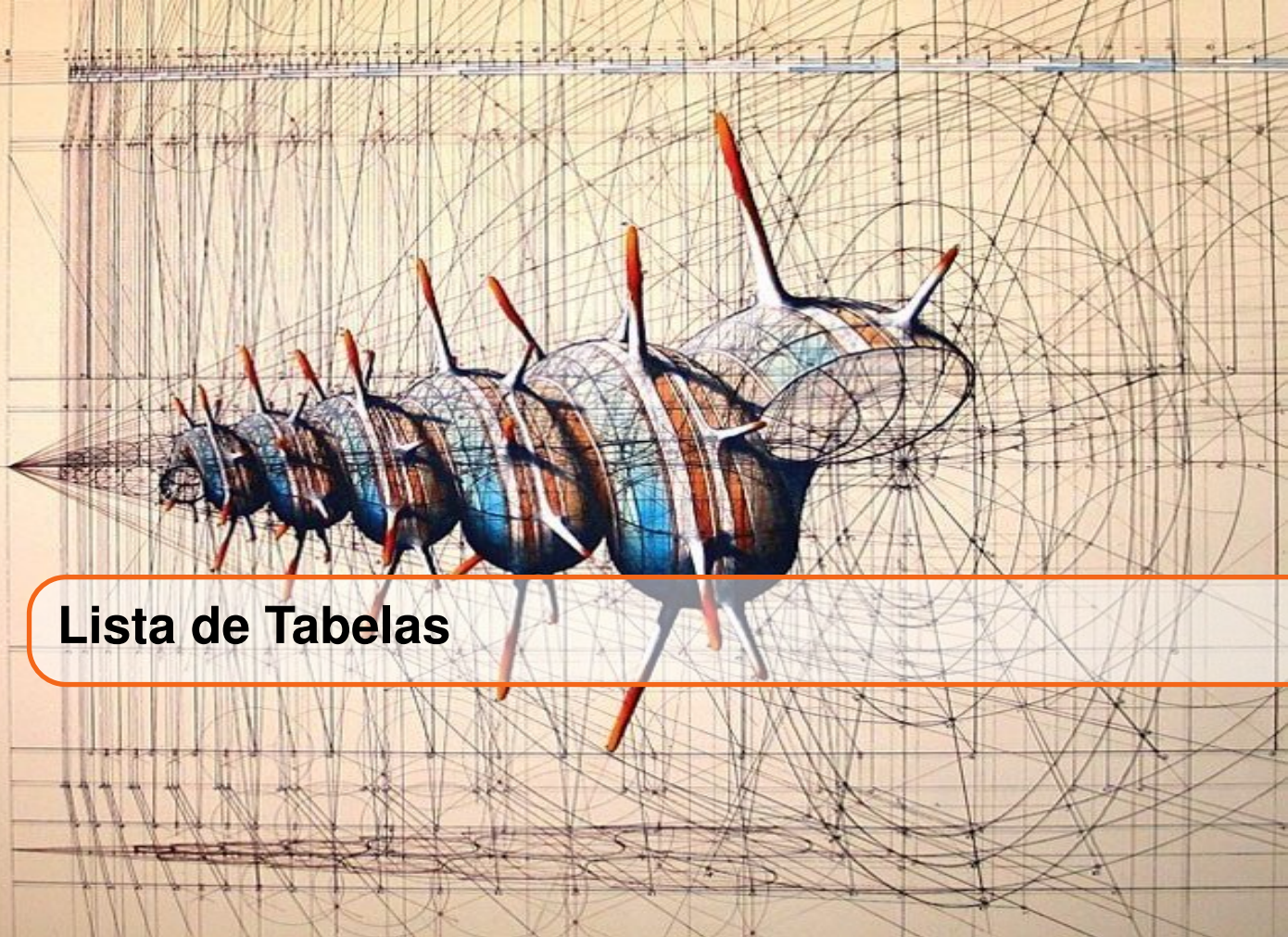
Lista de Figuras

- 2.1 Geometricamente o **Produto Escalar** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ representa a área A porque 33
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi = ab \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})$.
- 2.2 O **Produto Vetorial** ou externo de vetores é um vetor cuja magnitude é a área do paralelogramo e a direção é ortogonal a ambos. 34
- 2.3 Decomposição de um vector em componente normal e paralela a uma direção dada. . 34
- 2.4 Cálculo do produto vetorial de dois vetores \vec{a}, \vec{b} 35
- 2.5 **Produto misto de três vetores** 36
- 2.6 Coordenadas Polares $\{r, \theta\}$ dum ponto no plano, com r a distância à origem e θ o ângulo que o vetor posição do ponto faz com uma direção de referência \hat{x} . Em coordenadas cilíndricas usa-se em geral a notação $\{\rho, \phi, z\}$, onde $r \rightarrow \rho$ e $\theta \rightarrow \phi$ 37
- 2.7 Derivada dum vector \vec{a} de modulo constante. 38
- 2.8 Variação infinitesimal de um vector de magnitude $|\vec{a}|$ constante. 39
- 2.9 Referencial de coordenadas esféricas $\{\rho, \theta, \phi\}$ 40
- 2.10 Referencial de coordenadas cilíndricas $\{\rho, \phi, z\}$ 40
- 2.11 Componentes normal \vec{a}_n e tangencial \vec{a}_t da aceleração \vec{a} 41
- 2.12 Vetores do referencial local de Frenet-Serret e plano osculador num ponto de uma curva. 43
- 2.13 Circulação elementar e rotacional dum campo vectorial \vec{A} 45
- 2.14 Em coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ um ponto do espaço é determinado pela distância r à origem do sistema de referência, o ângulo θ entre o eixo vertical \vec{e}_z e a linha de observação do ponto a partir da origem, e o ângulo ϕ entre o plano vertical xOz e o plano vertical passando pelo ponto e o eixo \vec{e}_z . Neste sistema de coordenadas, o vector posição dum ponto é $\vec{r} = r \vec{e}_r$, no respetivo referencial móvel esférico $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ associado a este ponto. Qualquer vector \vec{E} associado a \vec{r} (por exemplo a velocidade, a aceleração ou um campo de força nesse ponto) se pode decompor em componentes $\{E_r, E_\theta, E_\phi\}$ no referencial móvel em \vec{r} 59
- 2.15 Parâmetros $\{r, \theta, \phi\}$ e Elementos Infinitesimais em 60
Coordenadas Esféricas.

2.16	Em coordenadas cilíndricas um ponto do espaço é representado por coordenadas $\{\rho, \phi, z\}$, onde ρ é a distância ao eixo \vec{e}_z , ϕ o ângulo que o plano vertical passando pelo ponto e o eixo \vec{e}_z faz com o plano vertical xOz , e z a altura do ponto relativamente ao plano horizontal xOy . Neste sistema de coordenadas, o vetor posição dum ponto é $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$ no respetivo referencial móvel cilíndrico $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z\}$ associado a esse ponto. Qualquer vetor \vec{E} associado a \vec{r} (por exemplo a velocidade, a aceleração ou um campo de força nesse ponto) se pode decompor em componentes $\{E_\rho, E_\phi, E_z\}$ no referencial móvel em \vec{r} .	63
2.17	Ângulo que subtende um arco de círculo.	67
5.1	Torção de um cilindro de raio R e altura ℓ .	88
5.2	Força sobre a carga q_1 no campo das cargas q_2 e q_3 .	90
5.3	Campo de um dipolo elétrico.	90
5.4	Contribuições elementares para o campo elétrico duma barra finita de comprimento $L = 2a$ uniformemente carregada com carga Q .	92
5.5	Linhas de um campo $\vec{A} = x^2 \sin(y) \vec{e}_x + (x+y) \cos(x) \vec{e}_y$	94
5.6	Linhas de campo de um dipolo elétrico, i.e. duas cargas iguais de sinais contrários (azul=positiva)	95
5.7	Linhas de campo de duas carga desiguais de sinais contrários. Note a existência de um ponto onde o campo se anula.	95
5.8	Condutor cilíndrico uniformemente carregado em cima de um plano condutor neutro.	97
5.9	Dipolo cilíndrico	99
5.10	Dipolo pontual	99
5.11	Duas cargas $-q$ e $+2q$	100
5.12	Duas cargas $+q$ e $+2q$	100
5.13	Definição de ângulo Sólido	100
5.14	Definição de Ângulo Solido.	101
5.15	Lei de Gauss	102
5.16	Superfície de Gauss Esférica (amarela) e Fluxo (cinzento) $R \rightarrow r(1 + \frac{3E}{r})^{1/3}$	104
5.17	Superfície de Gauss Cilíndrica (amarela) e Fluxo (cinzento) $R \rightarrow r\sqrt{1 + \frac{2E}{r}}$	105
5.18	Superfície de Gauss Cilíndrica (amarela) e Fluxo (cinzento)	106
5.19	Campo à superfície de um condutor carregado em equilíbrio eletrostático usando o princípio de sobreposição.	107
5.20	Dipolo Elétrico	115
5.21	Linhas de campo de um dipolo elétrico, i.e. duas carga iguais de sinais contrários (azul=positiva).	116
5.22	Condensador plano parcialmente cheio com dielétrico	123
5.23	Condensador esférico	127
5.24	Linhas equipotenciais e de campo do quadrupolo no plano das cargas.	131
5.25	Esfera condutora ligada à terra na presença de uma carga q .	132
5.26	Esfera condutora isolada na presença de uma carga q .	132
5.27	Densidade superficial de carga induzida numa esfera condutora descarregada de raio R à distância d de uma carga pontual q .	134
5.28	Cálculo direto do campo num ponto da superfície da esfera causado por cargas superficiais na esfera e por uma carga pontual q exterior à distância d do centro.	135
5.29	Campo e cargas induzidas entre duas esferas condutoras isoladas, a da esquerda neutra.	137
5.30	Detalhe do campo fictício no interior da esfera condutora devido às cargas-imagem.	137
5.31	Linhas de campo e equipotenciais para duas esferas condutoras idênticas, uma das quais ligada à terra.	137

5.32	Pelo método das imagens, o potencial no interior é a soma dos potenciais da carga real q e duma carga virtual $q' = -\frac{R}{a}$ colocada à distância $d = \frac{R^2}{a}$ do centro da esfera na direção de \vec{e}_z .	138
5.33	Coeficientes de Capacidade para duas esferas condutoras próximas.	143
6.1	Superfície de Gauss S (amarelo) intercetando a fronteira dum material dielétrico de permissividade ε (laranja) com o vazio. O dielétrico está carregado com densidades de carga de polarização σ_p e ρ_p , para além de poder ter cargas verdadeiras também.	158
6.2	Descontinuidade da componente normal de \vec{D} ao atravessar uma superfície carregada.	159
6.3		161
6.4	Condensador plano com dielétrico de permissividade ε , armaduras de área A e separação d , capacidade $C = \frac{\varepsilon A}{d}$.	162
6.5		165
6.6	Condensador plano parcialmente preenchido com placa dielétrica com folga.	168
6.7	Condensador plano parcialmente preenchido com placa dielétrica sem folga.	168
6.8	Condensador plano parcialmente preenchido com duas placas dielétricas.	169
6.9	Díodo semiconductor pn	172
6.10	Código de cores em resistências	175
7.1		188
7.2	Produto vetorial de \vec{a} e \vec{b} e sua reflexão num espelho como um vetor axial.	190
7.3	Reflexão do campo magnético de uma corrente filiforme I . A corrente refletida é $I' = -I$. Devido à sua natureza axial, a imagem \vec{B}' é o negativo da reflexão normal de um vetor polar.	191
7.4	Reflexão do campo magnético de uma corrente filiforme $-I$. O campo no espelho devia ser igual ao original na figura 7.3 porque a corrente refletida é $-I' = I$. A componente \vec{B}_z deve ser nula.	191
7.5	Arco de corrente I com raio a	192
7.6		192
7.7	A corrente que atravessa um segmento $d\vec{r}$ numa superfície com densidade de corrente superficial \vec{J}_s é $dI = \vec{J}_s \cdot (\vec{n} \times d\vec{r})$, onde \vec{n} é a normal à superfície.	193
7.8		194
7.9	A intensidade do campo \vec{B} aumenta à medida que nos aproximamos do anel.	196
7.10	Campo magnético de um anel de corrente.	196
7.11	Circulação de Ampère para uma corrente retilínea infinita I uniformemente distribuída pela secção de um condutor cilíndrico de raio a .	198
7.12	Campo de uma corrente I num condutor retilíneo filiforme.	199
7.13		200
7.14		200
7.15	Efeito de Hall.	201
7.16	Força entre correntes filiformes I_1 e I_2 paralelas separadas por uma distância d .	203
8.1	Teorema do fluxo-divergência é usado para calcular a variação do fluxo de \vec{B} através de um circuito móvel Γ .	213
8.2		215
8.3		220
8.4	Ferromagnete toroidal com entreferro.	223
8.5	Densidade de fluxo magnético \vec{B}_m duma barra uniformemente magnetizada.	230
8.6	Campo $\vec{H}_m = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_m - \vec{M}$ dentro e fora da barra da Figura (8.5).	230
8.7	Ferromagnete de núcleo retangular com fenda.	233
8.8	Curva de histerese de um material magnético.	238
9.1	Onda plana elípticamente polarizada	255
9.2		258

9.3	Onda TM tem o campo magnético perpendicular ao plano de incidência.	265
9.4	Onda-p ou TM (Transverso-Magnética) tem o campo elétrico paralela ao plano de incidência e o campo magnético paralelo à superfície de separação do meios <i>I</i> e <i>II</i>	266
9.5	Refletância (<i>R</i>) e Transmitância (<i>T</i>) para uma onda-p ou (TM).	268
9.6	Onda-s ou TE (Transverso-Elétrica)	269
9.7	Refletância (<i>R</i>) e Transmitância (<i>T</i>) para uma onda-s ou (TE).	270
9.8	Inversão de fase na reflexão	271
9.9	Experiência de Young	273
9.10	Difração de Fraunhofer. A fenda do lado esquerdo tem abertura <i>a</i> e está a grande distância <i>d</i> do alvo. A intensidade no alvo é representada pela figura do lado direito, onde os mínimos representam intensidade zero. As ondas incidente e difratada são planas e monocromáticas de comprimento de onda $\lambda < a$	278
10.1	Lente Convexa: Imagem Real	294
10.2	Lente Convexa: Imagem Virtual	294
10.3	Lente Concava: Imagem Virtual	295
10.4	Magnificação angular duma lente	295
10.5	Microscópio	296
10.6	Magnificação angular dum telescópio	297
10.7	Telescópio Galileano	297
10.8	Telescópio Newtoniano	298



Lista de Tabelas

1.1	Série tribo-elétrica	28
4.1	Quadro histórico de eletromagnetismo	78
4.2	Grandezas Elétricas e suas Dimensões no sistema SI	79
6.1	Constantes dielétricas ϵ_r e campos de rotura em MV/m para vários materiais.	156
6.2	Capacidade de condensadores simples cheios de um dielétrico de permissividade ϵ .	165
8.1	Suscetividade magnética volúmica χ_m .	236
8.2	Permeabilidades relativas μ_r .	237
9.1	Equações de Maxwell e relações entre campos e correntes	250
9.2	Índices de refração para alguns materiais	260

Introdução

1	Programa	17
1.1	Organização e Funcionamento	
1.2	Programa	
1.3	Propriedades da carga elétrica.	
1.4	A experiência de Millikan.	
1.5	Como é que se distribuem as cargas nos condutores e isolantes?	
1.6	Cargas Elementares	
1.7	Comparação entre força elétrica e força gravitacional.	
1.8	Interações fundamentais e escalas.	
1.9	Indução elétrica em condutores	
1.10	Indução elétrica em isolantes e polarização	
1.11	Tribo-eletricidade e indução elétrica	
2	Álgebra e Vetores	29
2.1	Vetores, versores e cossenos diretores	
2.2	Produto Escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$	
2.3	Produto Vetorial: $\vec{a} \times \vec{b}$	
2.4	Produto Vectorial Triplo: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$	
2.5	Produto Misto: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}$	
2.6	Coordenadas Polares	
2.7	Cálculo com vectores	
2.8	Operadores Diferenciais em Coordenadas Cartesianas	
2.9	Operadores Diferenciais em Coordenadas Curvilíneas	
2.10	Exercícios	
3	Formulas	69
3.1	Identities Matemáticas	
4	Introdução, Historial e Unidades	73
4.1	Interação à distância versus Forças de Contacto	
4.2	O Campo de uma Fonte Pontual	

1. Programa

Conteúdo

1.1	Organização e Funcionamento	17
1.1.1	Avaliação	17
1.2	Programa	18
1.2.1	Bibliografia	21
1.3	Propriedades da carga elétrica.	22
1.4	A experiência de Millikan.	22
1.5	Como é que se distribuem as cargas nos condutores e isolantes?	23
1.6	Cargas Elementares	24
1.7	Comparação entre força elétrica e força gravitacional.	25
1.8	Interações fundamentais e escalas.	26
1.9	Indução elétrica em condutores	26
1.10	Indução elétrica em isolantes e polarização	27
1.11	Tribo-eletricidade e indução elétrica	27
1.11.1	Forças, Trabalho e Energia	28

1.1 Organização e Funcionamento

1.1.1 Avaliação

- A componente teórico-prática será avaliada por exame final contando 75% para a nota final, com nota mínima 8.5.

- A componente laboratorial (3 trabalhos de duas horas) será avaliada por relatórios entregues no fim de cada sessão, contando 25% para a nota final.
- Os alunos com a componente laboratorial já realizada estão dispensados de realizar os laboratórios neste semestre, sendo a sua nota recuperada para a avaliação final.
- Existem duas épocas de exame e será obrigatório inscrição via Fenix.
- Os alunos com a componente laboratorial já realizada posteriormente estão dispensados de realizar os laboratórios neste semestre, sendo a sua nota recuperada para a avaliação final.

1.2 Programa

1.2.0.1 Lei de Coulomb.

- Propriedades das cargas elétricas.
- Força eletrostática: lei de Coulomb.
- Comparação entre a força elétrica e a força gravitacional.
- Princípio de sobreposição.
- Noção de campo e de potencial.
- Conceito de campo elétrico: intensidade, princípio da sobreposição e linhas de força.
- Aplicação: cálculo do campo elétrico de um dipolo.
- Cálculo do campo elétrico para uma distribuição de cargas pontuais.
- Generalização do cálculo para distribuições contínuas de carga.
- Conceito de densidade de carga: linear, em superfície e em volume.
- Aplicações: cálculo dos campos de um fio longo e de um anel carregados uniformemente.
- Dipolo elétrico.

1.2.0.2 Lei de Gauss.

- Conceito de Fluxo do campo elétrico.
- Lei de Gauss: fluxo do campo através de uma superfície fechada relacionado com a carga no interior da superfície.
- Aplicações: cálculo do campo criado por uma esfera dielétrica, isolante;
- Campo de um fio retilíneo, longo (comparação com o campo obtido por integração das contribuições das cargas distribuídas uniformemente).
- Conceito de condutor em equilíbrio eletrostático.
- Campo de uma esfera condutora;
- Estudo de um condutor fechado: cálculo do campo, verificação da descontinuidade do campo através da superfície carregada.

1.2.0.3 Energia potencial associada à força eletrostática, conservativa.

- Definição de potencial elétrico.
- Relação entre o sentido do campo elétrico e o gradiente das superfícies equipotenciais (normal, segundo os potenciais decrescentes).
- Aplicação: Cálculo do potencial de uma esfera condutora.
- Noção de condensador e definição de capacidade.
- Cálculo da capacidade de um condensador esférico e de uma esfera, como caso limite (segunda armadura no “infinito”).
- Aplicação: Condensador “atmosférico”, formado pela superfície terrestre (armadura negativa) e uma camada da atmosfera (armadura positiva).
- Cálculo da capacidade de um condensador de armaduras planas paralelas: cálculo do campo elétrico e sua relação com a diferença de potencial, no interior do condensador.
- Análise do processo de carga de um condensador como uma bateria.
- Aplicação: Cálculo do trabalho realizado para carregar o condensador: energia potencial elétrica armazenada; densidade de energia, associada ao campo elétrico.

1.2.0.4 Dielétrico.

- Polarização.
- Conceito de dielétrico: cargas de polarização e campo no interior do dielétrico;
- Permitividade elétrica e constante dielétrica.
- Campo elétrico máximo a que um dielétrico pode ser submetido.
- Cálculo da capacidade de um condensador com dielétrico.
- Aplicações: condensador num circuito de um desfibrador; condensador num microprocessador.
- Energia elétrica na matéria.
- Exemplo: Energia armazenada num sistema de condensadores; cálculo da capacidade numa associação em série e numa associação em paralelo.

1.2.0.5 Corrente elétrica estacionária.

- Densidade e intensidade de corrente: valor médio no tempo e valor instantâneo.
- Equação da continuidade da carga.
- Densidade de corrente: sua relação com campo elétrico, Lei de Ohm local.

1.2.0.6 Lei de Ohm.

- Lei de Ohm: aplicação à queda de tensão ao longo de um troço de um condutor;
- Conceito de resistência; resistividade elétrica e condutividade elétrica;
- Referência aos seus valores para condutores, semi-condutores e isolantes.
- Lei de Joule.

1.2.0.7 Leis de Kirchoff.

- Leis das malhas, lei dos nós.
- Circuito RC.
- Cálculo da resistência de uma associação em série e de uma associação em paralelo de resistências.
- Exemplo: circuito com uma bateria com resistência interna ligada a três lâmpadas em paralelo.

1.2.0.8 Lei de Biot-Savart.

- O campo magnético: perspetiva histórica, características do campo.
- Lei de Biot-Savart: campo magnético criado por uma carga pontual em movimento;
- Cálculo do campo \vec{B} devido a um fio condutor retilíneo (caso geral e fio longo).
- Aplicação da lei de Biot-Savart: campo \vec{B} criado por um anel de corrente e por um solenóide.

1.2.0.9 Lei de Ampère.

- Lei de Ampère: circulação do campo \vec{B} ; correntes elétricas como fonte do campo magnético.
- Aplicação: cálculo da força entre dois fios longos, separados por $1m$, ambos percorridos por $1A$ (definição de "ampere" como a intensidade da corrente que provoca a força entre os fios)
- Aplicação da lei de Ampère a um solenóide "longo".

1.2.0.10 Força de Lorentz.

- Força de Lorentz: ação simultânea dos campos elétrico e magnético sobre uma carga.
- Força exercida pelo campo \vec{B} sobre uma corrente elétrica num fio condutor: cálculo para um troço de um condutor retilíneo e generalização para qualquer condutor, em \vec{B} não uniforme.
- Força magnética sobre uma carga elétrica em movimento: equações do movimento, período e frequência ciclotrónica.
- Aplicações: filtro de velocidades e espectrómetro de massa; cálculo da intensidade do campo \vec{B} a partir do conhecimento da trajetória circular dos eletrões.

1.2.0.11 Magnetização.

- Conceito de magnetização e de suscetibilidade magnética.

- Dipolo magnético.
- Torque sobre um dipolo num campo magnético.
- Energia em magnetostática.

1.2.0.12 Condições fronteira

- Correntes de magnetização.
- Comportamento dos campos na fronteira entre vários materiais.
- Eletromagnetes.

1.2.0.13 Classificação de Substâncias Magnéticas

- Substâncias ferromagnéticas, diamagnéticas e paramagnéticas.
- Curva de Magnetização e Histerese Magnética
- Relação entre a intensidade de Campo e Densidade de fluxo magnético em materiais ferro-magnéticos.

1.2.0.14 Fluxo magnético.

- Conceito de fluxo magnético.
- Cálculo do fluxo de \vec{B} associado a uma bobina; conceito e cálculo da indutância \mathcal{L} .
- Coeficientes de indução mútua e auto-indução \mathcal{L}_{ij} .
- Aplicação: solenóide longo com interior em ferro, cálculo do fluxo magnético e da indutância.
- Aplicação: estudo de um transformador; tensão no primário e tensão induzida no secundário; relação de espiras entre o primário e secundário.

1.2.0.15 Lei de Faraday.

- **Lei geral da indução eletromagnética: conceito de força eletromotriz (f.e.m.) induzida e de campo de indução.**
- Corrente induzida numa espira por variação de fluxo magnético: variação de \vec{B} no tempo, ou variação relativa da posição da espira no campo \vec{B} .
- Lei de Lenz e o sentido da corrente induzida.
- Aplicação a um circuito RL como uma fonte de corrente contínua: f.e.m. na bobina.
- Papel de um condensador em corrente contínua: análise da carga e descarga do condensador.
- Corrente elétrica variável.
- Motores e geradores elétricos.
- Caracterização de uma fonte de corrente alternada sinusoidal.
- Estudo de um circuito RL: cálculo da corrente e verificação do seu atraso no tempo em relação à tensão; conceito de desfasagem.
- Circuito RLC: resolução da equação diferencial do circuito para o cálculo da corrente. Condição de ressonância: cálculo da frequência de ressonância, verificação de desfasagem nula.

1.2.0.16 Equações de Maxwell.

- A forma local das Leis do Eletromagnetismo.
- Estudo do condensador em corrente alternada: conceito de corrente de deslocamento; lei de Ampère generalizada.
- Dedução das equações de onda para os campos elétrico e magnético a partir das Equações de Maxwell.
- Velocidade de propagação da luz.

1.2.0.17 Ondas eletromagnéticas.

- A equação de ondas resultante das Equações de Maxwell.
- Revisão do conceito de onda mecânica (equação de onda, comprimento de onda, número de onda, período, frequência, velocidade de propagação).
- Estudo da solução onda plana monocromática.

- Energia e intensidade das ondas eletromagnéticas.
- Ondas eletromagnéticas: localização no espectro eletromagnético (aplicações: cálculo do comprimento de onda, para ondas de rádio e radiação visível).
- Descrição corpuscular e ondulatória. Conceito de vetor de Poynting.
- Cálculo da Intensidade (I) da onda (valor médio do módulo do vetor de Poynting), sua relação com a Potência, campos elétrico e magnético, densidade de energia e velocidade de propagação; pressão de radiação.
- Exemplos de aplicação do cálculo de I e dos campos: laser de rubi e lâmpada incandescente.

1.2.0.18 Ótica Ondulatória: Equações de Fresnel e princípio de Fermat. Interferência e difração.

- Conceito de polarização de uma onda: linear, circular, elíptica.
- Obtenção de luz polarizada a partir de não - polarizada: método de absorção por filtros polarizadores.
- Fenómeno da difração. Efeito da dimensão de uma abertura num alvo sobre o qual incide uma onda plana.
- Estudo da interferência em experiências com duas fendas: condições para interferência construtiva e destrutiva.
- Cálculo da intensidade das franjas de interferência.
- Generalização das interferências para um sistema multi-fenda: estudo da rede de difração. Aplicação ao trabalho de Laboratório.

1.2.0.19 O limite da Ótica Geométrica e as leis de reflexão e refração.

- A ótica geométrica e a aproximação de traçado de raios.
- Estudo da reflexão e da refração. Definição de índice de refração.
- Lei de Snell. Aplicações.
- Estudo das imagens formadas por espelhos planos. Imagem real e imagem virtual. Ampliação (M) da imagem.
- Imagens formadas por espelhos esféricos: côncavos e convexos. Centro de curvatura, distância focal e equação dos espelhos.
- Diagramas de raios: aplicação a um espelho côncavo.
- Imagens formadas por refração: aplicação a superfícies esféricas e planas; diferença entre profundidade aparente e profundidade real.
- Estudo das lentes finas: equação das lentes e conceito de dioptria. Efeito das lentes convergentes e divergentes sobre raios paralelos.
- Diagramas de raios e formação de imagens: aplicação a uma lente convergente.
- Aplicações: câmara fotográfica, o olho humano, o telescópio.

1.2.1 Bibliografia

1.2.1.1 Principal

- [Physics for Scientists and Engineers, R.A.Serway, J.W.Jewett \(edição em Português\)](#)
- [Fundamentals of Physics, D.Halliday, R.Resnick, J.Walker](#)
- [Physics for Scientists and Engineers, P.A.Tipler](#)
- [Electromagnetismo, Alfredo Barbosa Henriques, Jorge Crispim Romão](#)

1.2.1.2 Secundária

- [Physics: Calculus, E.Hecht](#)
- [Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, D.C.Giancoli](#)
- [The Feynman Lectures on Physics, R.Feynman](#)

1.2.1.3 Notas online

- Na página seguinte podem encontrar auxiliares para conceitos matemáticos básicos que serão necessários para resolver os exercícios:

Notas de Física

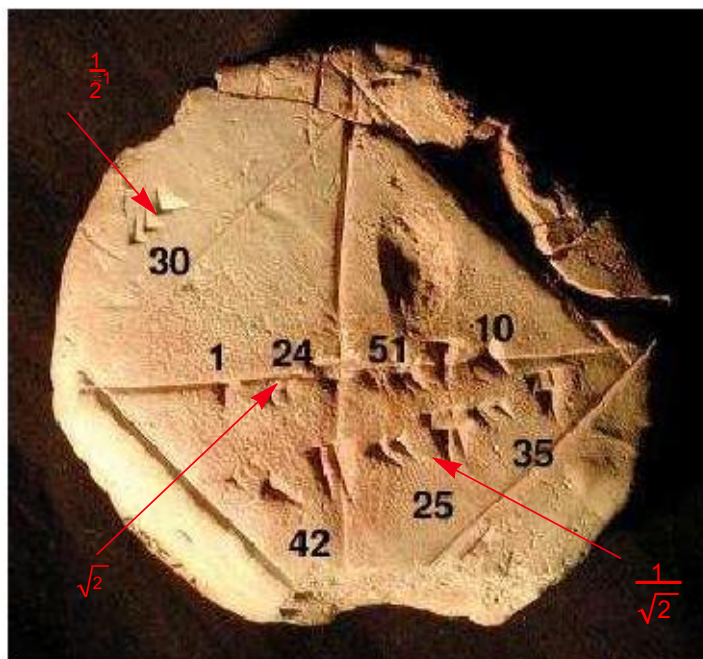


Figura 2

$$\begin{cases} 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} & = 1.41421296296 \\ \sqrt{2} & = 1.41421356237 \end{cases}$$

1.3 Propriedades da carga elétrica.

- É transferível dum objeto para outro por contacto.
- É altamente móvel em objetos metálicos (**condutores**) e muito pouco móvel noutros materiais (**isolantes**).
- Há dois tipos de carga elétrica: **positiva** e **negativa**.
- Partículas sem carga também existem mas podem ser explicadas em termos destas duas.
- A carga total é igual à soma das cargas individuais.
- A carga total de um sistema **isolado** é constante.
- A carga elétrica é invariante para mudanças de referencial.
- A unidade de carga elétrica no sistema (SI) é o Coulomb (C).
- A carga elétrica é discreta (Millikan 1909).
- A carga discreta elementar tem magnitude $|q_e| \approx 1.602 \cdot 10^{-19}C$.

1.4 A experiência de Millikan.

- Gotas de um fluido (óleo) de densidade ρ_{fl} e carga q caem com aceleração $\vec{g} = g \vec{e}_z$, na presença de um campo elétrico $\vec{E} = E \vec{e}_z$ e no ar com densidade ρ_{ar} , sob a ação do seu peso aparente (peso-impulsão) e da força de atrito viscoso, a qual é proporcional à velocidade instantânea da gota, ao seu raio r e à viscosidade η do meio.
- Na ausência do campo elétrico $\vec{E} = 0$ a velocidade da gota aumenta até que a força de atrito viscoso iguale o peso aparente, e então a velocidade limite $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_z$ pode ser medida como $\frac{\text{dist. percorrida}}{\text{tempo de queda}}$ e o raio r da gota deduzida:

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{fl}-\rho_{ar})\vec{g}-6\pi\eta r\vec{v}_1=0 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\eta v_1}{g(\rho_{fl}-\rho_{ar})}}$$

- Aplicando agora um campo elétrico vertical $\vec{E} = -E\vec{e}_z$ antes da gota chegar ao fundo é possível inverter o seu movimento, medir uma nova velocidade limite $\vec{v}_2 = -v_2\vec{e}_z$ (devido ao novo balanço entre as forças) e deduzir a carga q :

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{fl}-\rho_{ar})\vec{g}-6\pi\eta r\vec{v}_2+q\vec{E}=0 \quad \Rightarrow \quad q=\frac{9\pi}{E}(v_1+v_2)\sqrt{\frac{2\eta^3 v_1}{g(\rho_{fl}-\rho_{ar})}}$$

- Alternativamente, o campo elétrico $\vec{E} = -E_a\vec{e}_z$ pode ser ajustado para que a gota fique suspensa e imóvel, e sabendo o valor do campo pode-se deduzir a carga q na gota:

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{fl}-\rho_{ar})\vec{g}+q\vec{E}_a=0 \quad \Rightarrow \quad q=\frac{9\pi}{E_a}v_1\sqrt{\frac{2\eta^3 v_1}{g(\rho_{fl}-\rho_{ar})}}$$

- Ao executar esta operação para diferentes gotas com diferentes cargas q e raios r conclui-se que $q = Nq_e$ com N inteiro e $q_e \approx 1.602 \times 10^{-19}C$.
- A experiência de Millikan pode ser realizada online no seguinte site (java): [College Physics](#).

1.5 Como é que se distribuem as cargas nos condutores e isolantes?

- A designação de **condutor** e **isolante** é demasiado redutora. Dependendo de condições exteriores, como temperatura, pressão, forças aplicadas, ou interiores, como mudança de fase, abundância de contaminantes ou estrutura cristalina, os materiais podem ser mais ou menos condutores ou isolantes, como

▷ **CONDUTORES:**

Materiais que permitem a transmissão de corrente elétrica através do movimento de eletrões, iões ou buracos. A maioria dos metais, líquidos eletrólitos e plasmas são exemplos de condutores à temperatura ambiente ou alta. Semi-metais como a grafite também são condutores.

▷ **SUPER-CONDUTORES:**

Materiais com resistência elétrica nula ou quase nula, em geral a muito baixas temperaturas.

▷ **SEMI-CONDUTORES:**

Materiais cuja resistência diminui com o aumento da temperatura, ao contrário do que acontece com os metais. No seu estado natural são maus condutores, mas a utilização de impurezas ou a aplicação de campos elétricos exteriores permite aumentar a sua condutividade de tipo-p ou tipo-n. Sílica com impurezas de Antimónio, Fósforo ou Arsénio (pentavalentes) ou Boro, Gálio ou Índio (trivalentes) são frequentemente utilizados. A sua condutividade pode ser dependente da direção da corrente ou da sua intensidade, podem ser foto-emissores (LEDs ou QDs) ou conversores termo-elétricos.

▷ **NÃO-OHMICOS:**

Materiais condutores para os quais a derivada da tensão em ordem à corrente (resistência diferencial) não é constante. Semi-condutores e super-condutores são exemplos de materiais não-ohmicos.

- ▷ **DIELÉTRICOS:**
não-condutores em geral
- ▷ **PIEZOELÉTRICOS E PIRO-ELÉTRICOS:**
Materiais cuja polarização depende não só do campo elétrico aplicado mas também da história do material (histerese). Piro-elétricos são materiais em que a polarização depende da temperatura e são frequentemente usados na deteção de radiação infravermelha. Nos piezoelétricos a polarização é dependente da deformação e são usados para conversão eletromecânica de energia.
- ▷ **COLOIDES:**
- ▷ **META-MATERIAIS:**
Novos materiais artificiais que não existem naturalmente

1.6 Cargas Elementares

- Hoje sabemos existirem inúmeras partículas elementares com carga positiva ou negativa. Os exemplares mais conhecidos são prótons (positivo) e elétrons (negativo).

PARTÍCULA	CARGA (C)	MASSA (KG)
Elétron	$-1.6021766 \times 10^{-19}$	9.109383×10^{-31}
Próton	$+1.6021766 \times 10^{-19}$	$1.6726218 \times 10^{-27}$
Neutrão	0	$1.6749274 \times 10^{-27}$

- Na maior parte dos materiais sólidos em condições ambiente normais a existência duma carga significa um excesso (carga negativa), ou uma escassez (carga positiva), de elétrons para compensar a carga positiva dos núcleos nos respetivos átomos.
- Em geral alguns elétrons (negativos) nos átomos estão fracamente ligados aos seus núcleos (positivos) e podem ser facilmente arrancados (ou adicionados) às suas camadas eletrónicas exteriores à custa de (ou libertando) alguma energia, criando assim iões positivos (ou negativos).
- Nos materiais em estado sólido, os iões não se podem deslocar tão facilmente como os elétrons para compensar o desequilíbrio de cargas. Podem-se assim obter sólidos temporariamente carregados, positiva ou negativamente, retirando ou fornecendo-lhes elétrons por vários processos mecânicos, químicos ou radiativos.
- Nos líquidos, gases e plasmas os iões estão fracamente ligados uns aos outros e podem mover-se com relativa facilidade (embora com muito maior inércia que os elétrons) o que pode ser explorado para criar correntes de cargas iónicas (cargas positivas e/ou negativas) para além de eletrónicas (só cargas negativas).
- Nos materiais condutores, os elétrons mais fracamente ligados aos átomos (com energia suficiente para se considerarem numa banda de condução) podem facilmente redistribuir-se entre átomos vizinhos para atingir localmente (e temporariamente) um melhor balanço de cargas elétricas, mas nos materiais não-condutores a falta ou excesso de elétrons fica confinada localmente porque não há suficientes elétrons com energia que chegue para saltar de um átomo para outro.
- Em líquidos, gases e plasmas já os próprios iões se podem deslocar mais facilmente ou reagir quimicamente com outros elementos para redistribuir a falta ou excesso de elétrons até se encontrar uma solução estável.
- Nos materiais **semicondutores** alguns elétrons podem deslocar-se se forem excitados até atingir o nível da "banda de condução" e nessa altura conseguem mover-se com facilidade até dissiparem a sua energia em calor.

- Nos materiais semicondutores de tipo-p (**p-semicondutores**), embora haja muito pouca mobilidade dos elétrons é frequente que nos locais em que estes faltam, ou "buracos", geralmente associados a impurezas com falta de elétrons de valência, pareça existir uma "carga" positiva que se desloca à medida que elétrons de átomos vizinhos vão ocupando o lugar vago quando sujeitos a um campo exterior que lhes forneça suficiente energia para saltar.
- Nos materiais semicondutores de tipo-n (**n-semicondutores**) o processo é idêntico mas as impurezas introduzem um excesso local de elétrons.

1.7 Comparação entre força elétrica e força gravitacional.

- Átomo de Hidrogénio= 1 próton+1 elétron à distância $r_H = 5.3 \times 10^{-11} m$
- Constantes

$q_e = 1.6021766 \times 10^{-19} C$	$m_e = 9.109383 \times 10^{-31} Kg$
$q_p = 1.6021766 \times 10^{-19} C$	$m_p = 1.6726218 \times 10^{-27} Kg$
$G = 6.67408 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$	$\epsilon_o = 8.854187818 \times 10^{-12} \frac{C}{Nm^2}$
$r_H = 52.9 \times 10^{-12} m$	

- Força elétrica

$$|F_e| = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_e q_p}{r_H^2} = 8.24 \times 10^{-8} N$$

- Força gravítica

$$|F_g| = G \frac{m_e m_p}{r_H^2} = 3.63 \times 10^{-47} N$$

- Razão entre forças

$$\frac{|F_e|}{|F_g|} = 2.27 \times 10^{39}$$

1.8 Interações fundamentais e escalas.

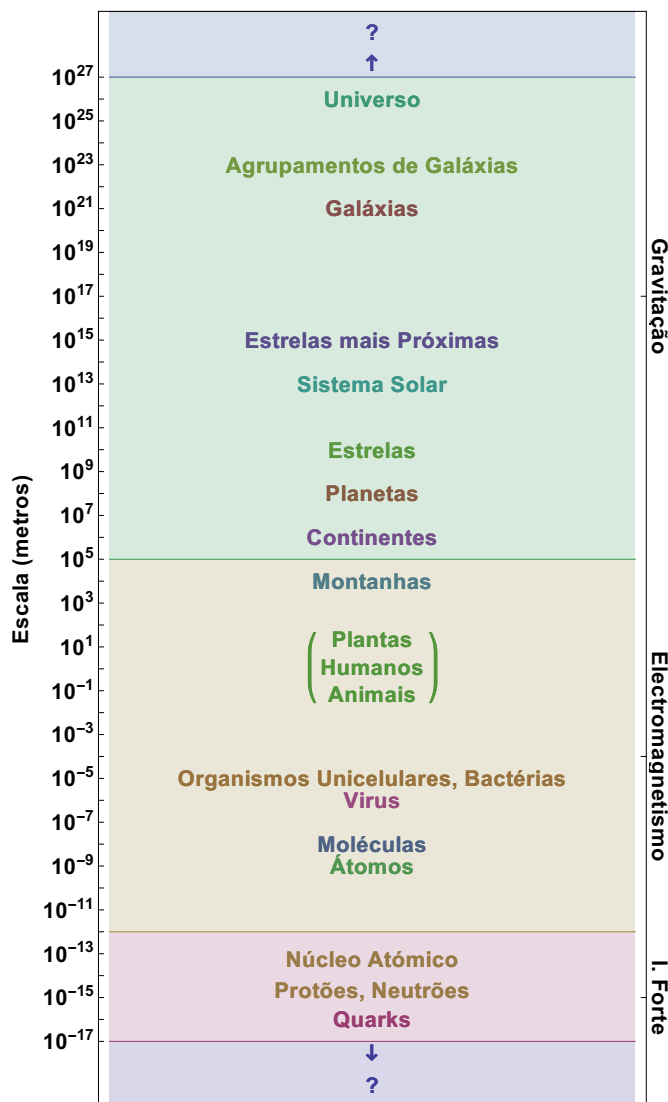


Figura 1

- À escala macroscópica a maioria dos materiais apresentam-se eletricamente neutros porque precisamente as forças elétricas são tão fortes que há a tendência de qualquer excesso de carga atrair cargas de sinal contrário até se atingir um equilíbrio. Por isso a interação gravítica é dominante a grandes escalas.
- Por outro lado forças magnéticas aparecem frequentemente à escala natural. Na história registada a primeira referência a minerais com estas propriedades é com Tales de Mileto cerca de 585 A.D., possivelmente provenientes da região da Grécia designada de Magnesia.
- Os efeitos dos campos magnéticos podem-se sentir a escalas planetárias, e são extremamente importantes para proteger a Terra do bombardeamento de partículas energéticas emanadas pelo Sol (vento solar), em particular durante os episódios de explosões solares (CMEs - Coronal Mass Ejections).

1.9 Indução elétrica em condutores

- Ao aproximar um objeto carregado positivamente dum condutor isolado, as cargas negativas no condutor são atraídas para a região perto do objeto, deixando a descoberto iões positivos

na região mais longínqua. Se esta consistir nas lâminas de um eletrometro, observa-se o afastamento destas devido à repulsão de cargas de sinal igual. A carga total do condutor mantém-se constante.

- Por outro lado, se o objeto estiver carregado negativamente, ao aproximar-se de um condutor isolado as cargas negativas no condutor são repelidas pela proximidade de cargas do mesmo sinal no objeto, e afluem em excesso à região mais longínqua do condutor, ficando a região próxima do condutor com déficit de eletrões, portanto com iões positivos. As lâminas dum eletrometro na região onde as cargas negativas se acumularam também se afastam, mas a carga total do condutor mantém-se constante.
- Se em qualquer destas situações se ligar o condutor à terra (consistindo num corpo condutor muito maior que pode fornecer ou absorver qualquer quantidade de eletrões sem alterar grandemente o seu estado, ou seja um reservatório de cargas negativas) mantendo o objeto carregado na proximidade do condutor, então a região longínqua passa a ser o reservatório e é de lá ou para lá que fluem os eletrões atraídos ou afastados pelo objeto carregado. As lâminas de um eletróstato já não se afastam tanto por não haver um excesso de carga aí, quer positiva quer negativa.
- Contudo, se entretanto se romper a ligação à terra e depois se afastar o objeto carregado da vizinhança do condutor, verifica-se que este adquiriu ou perdeu carga negativa, respetivamente no primeiro ou segundo cenário, o que manifesta pela separação novamente das lâminas do eletrometro ligado ao condutor.

1.10 Indução elétrica em isolantes e polarização

- No caso de materiais isolantes a vizinhança de um objeto carregado não provoca a migração de eletrões para perto ou longe da zona mais próxima do objeto, porque os eletrões não se movimentam facilmente nestes materiais.
- Contudo há um efeito de polarização ao nível atómico ou molecular que causa uma deformação na posição média normal dos eletrões nos orbitais atómicos e moleculares, criando pequenos dipolos à escala molecular que serão sempre atraídos pelo objeto carregado devido à maior proximidade das cargas de sinal oposto à do objeto.
- Este efeito minúsculo designa-se de **polarização**, mas como existem tantas moléculas as forças resultantes permitem observar uma nítida força atrativa do objeto carregado sobre materiais leves como pedaços de papel ou madeira de balsa, esferovite ou balões.

1.11 Tribo-eletricidade e indução elétrica

- A fricção de materiais diferentes é uma forma de criar cargas em excesso num material não-condutor (tribo-eletricidade)¹

Vidro + Seda → Carga Positiva no Vidro + Negativa na Seda
Pêlo + Borracha → Carga Positiva no Pêlo + Negativa na Borracha

- A tribo-eletricidade resulta da maior apetência dos átomos duma substância se ligarem quimicamente com os eletrões dos átomos de outra substância diferente com a qual entrem em contacto, a qual por sua vez pode ser mais ou menos resistente a doar os seus eletrões. A fricção não é necessária para a adesão dos eletrões, mas multiplica o efeito do contacto.

¹ O prefixo "tribo" significa "friccionar" em Grego.

SÉRIE TRIBO-ELÉTRICA	
ABSORVE ELETRÔES	FORNECE ELETRÔES
Ebonite	Espumas (poliuretano)
Silicone	Cabelos
Teflon	Pele oleosa
Silício	Nylon
PVC	Pele seca
Fita adesiva	Vidro
Plástico	Acrílico e Lucite
Poliéster	Couro
Borracha sintética	Pelo de coelho
Acetato e Rayon	Quartzo
Ouro e Platina	Mica
Bronze e Prata	Chumbo
Enxofre	Pelo de gato
Níquel e Cobre	Seda
Resinas	Alumínio
Âmbar	Papel
Madeira	Algodão
Aço (não carrega)	Lã (não carrega)

Tabela 1.1: Série tribo-elétrica

1.11.1 Forças, Trabalho e Energia

- Reveja os conceitos dados em mecânica para a relação entre forças e acelerações, momentos de força (binários ou torques) com as acelerações angulares e variações de momentos angulares.
- É importante relembrar os conceitos de Trabalho mecânico, Energia Cinética e o teorema Trabalho-Energia, Forças Conservativas e Potencial associado, Energia total e as Leis de Conservação e Equações de Continuidade.

- **Trabalho Mecânico**

Uma força $\vec{F}(\vec{r})$ que desloca um objeto ao longo de uma trajetória

$$\gamma_{AB} = \begin{cases} \vec{r}(s) & s \in [0, 1] \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_A \\ \vec{r}(1) = \vec{r}_B \end{cases}$$

realiza trabalho mecânico dado pelo integral de caminho

$$W_{AB} = \int_{\gamma_{AB}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \equiv \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} ds$$

2. Álgebra e Vetores

Conteúdo

2.1	Vetores, versores e cossenos diretores	30
2.1.1	Soma de vetores e produto dum vetor por um número λ	31
2.2	Produto Escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$	31
2.2.1	Propriedades:	31
2.2.2	Produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos(\theta_{ab})$	32
2.2.3	$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \vec{b}_{\parallel} = \vec{a}_{\parallel} \vec{b} $	33
2.3	Produto Vetorial: $\vec{a} \times \vec{b}$	34
2.3.1	Propriedades:	34
2.4	Produto Vectorial Triplo: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$	35
2.5	Produto Misto: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$	35
2.6	Coordenadas Polares	37
2.7	Cálculo com vetores	38
2.7.1	Derivação	38
2.7.2	Velocidade e aceleração	41
2.8	Operadores Diferenciais em Coordenadas Cartesianas	43
2.8.1	Convenção da Soma	43
2.8.2	Deltas de Kronecker δ_i^j e Símbolo Antisimétrico ε^{ijk}	43
2.8.3	Identities com operadores vectoriais	44
2.9	Operadores Diferenciais em Coordenadas Curvilíneas	55
2.9.1	Sistemas de Coordenadas	55

2.9.2	Coordenadas Esféricas $\xi_k \in \{r, \theta, \varphi\}$	59
2.9.3	Coordenadas Cilíndricas $\xi_k \in \{\rho, \phi, z\}$	63
2.10	Exercícios	65

2.1 Vetores, versores e cossenos diretores

Num modelo cartesiano, cada ponto \mathcal{P} do espaço físico pode ser descrito por três números reais $\{x, y, z\}$ a partir do momento que se escolheu um ponto origem O e três planos ortogonais de referência $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ passando por O : os números x, y, z representam então as distâncias de \mathcal{P} aos planos mutuamente ortogonais $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$. No modelo cartesiano o teorema de Pitágoras é válido e o quadrado da diagonal de um retângulo é igual à soma dos quadrados dos seus lados, e o mesmo se passa com um paralelepípedo reto, pelo que a distância de \mathcal{P} à origem O é

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A cada par de pontos \mathcal{P}, Q podemos associar um vetor $\vec{a}_{\mathcal{P}Q}$ pertencente a um espaço vetorial \mathbb{V} , de forma que o espaço cartesiano seja um **espaço afim** \mathfrak{E}_3 onde $Q = \mathcal{P} + \vec{a}_{\mathcal{P}Q}$ e, para qualquer $\vec{a} \in \mathbb{V}$ e $\mathcal{P} \in \mathfrak{E}_3$, se tenha $\mathcal{P} + \vec{a} \in \mathfrak{E}_3$.

Uma vez escolhido o sistema de referência $\mathcal{S}_o = \{O, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3\}$, podemos definir as direções ortogonais aos planos de referência como uma base de vetores $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ de \mathbb{V} . Cada vetor \vec{r} de \mathbb{V} pode agora ser associado a um ponto $\mathcal{P} \equiv \{x, y, z\} \in \mathfrak{E}_3$ por forma que $\mathcal{P} = O + \vec{r}$, escrevendo-se então

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

(daí o isomorfismo de \mathbb{V} com \mathbb{R}^3 como espaço vetorial).

Reciprocamente, cada par de pontos $\mathcal{P} = \{x, y, z\}, \mathcal{P}' = \{x', y', z'\}$ define um vetor

$$\vec{a}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = (x' - x) \vec{e}_x + (y' - y) \vec{e}_y + (z' - z) \vec{e}_z$$

que por sua vez está também associado ao ponto $\mathcal{P}'' = O + \vec{a}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'} = \{x' - x, y' - y, z' - z\}$, mas existe uma infinidade de outros pares de pontos $Q = \{x + \alpha, y + \beta, z + \gamma\}, Q' = \{x' + \alpha, y' + \beta, z' + \gamma\}$ que definem o mesmo vetor $\vec{a}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'} = \vec{a}_{QQ'}$.

Magnitude: A **magnitude, módulo ou norma** $|\vec{a}|$ de um vetor $\vec{a} \in \mathbb{V}$ é definida como a distância de $\mathcal{P} = O + \vec{a}$ à origem O . Assim, numa base ortonormada $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$, e tem-se

$$|\vec{a}| \doteq \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Versores: O **versor** de \vec{a} é o vetor de magnitude (ou módulo) unidade, $|\vec{e}_a| = 1$, paralelo a \vec{a} (mesma direção e sentido) e portanto $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_a$.

$$\vec{e}_a \equiv \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \vec{e}_x + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \vec{e}_y + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \vec{e}_z$$

Cossenos Diretores: Os **cossenos diretores** de \vec{a} são as componentes do vetor $\vec{e}_a = \cos(\theta_x) \vec{e}_x + \cos(\theta_y) \vec{e}_y + \cos(\theta_z) \vec{e}_z$. Os ângulos diretores $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ são definidos por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \cos(\theta_x) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} & ; \quad \sin(\theta_x) = \frac{\sqrt{a_y^2 + a_z^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos(\theta_y) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} & ; \quad \sin(\theta_y) = \frac{\sqrt{a_x^2 + a_z^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos(\theta_z) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} & ; \quad \sin(\theta_z) = \frac{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{array} \right.$$

Note-se que para definir unicamente uma direção \vec{e}_a são necessários três ângulos diretores: a intersecção dos cones coaxiais de dois deles geralmente dá duas retas, daí a ambiguidade.

2.1.1 Soma de vetores e produto dum vetor por um número λ

A soma de vetores é comutativa, i.e. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, o que significa que o trajeto $O \rightarrow P = O + \vec{a} \rightarrow Q = P + \vec{b}$ termina no mesmo ponto que o trajeto $O \rightarrow P' = O + \vec{b} \rightarrow Q' = P' + \vec{a}$, portanto $Q' = Q$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = (a_x + b_x) \vec{e}_x + (a_y + b_y) \vec{e}_y + (a_z + b_z) \vec{e}_z$$

$$\lambda \vec{a} \equiv \lambda |\vec{a}| \vec{e}_a = \lambda a_x \vec{e}_x + \lambda a_y \vec{e}_y + \lambda a_z \vec{e}_z \quad \therefore \quad |\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

2.2 Produto Escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$

É possível mostrar que o conceito de distância no espaço cartesiano \mathbb{E}_3 permite deduzir a existência de um **produto escalar** entre vetores de \mathbb{V} . Este produto escalar $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \mathbb{R}$ (ou $\vec{a} \cdot \vec{b}$) pode ser definido da seguinte forma: se identificarmos $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2$, $\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = |\vec{b}|^2$, então

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \doteq \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$$

A utilização do Teorema de Pitágoras no plano definido por dois vetores perpendiculares \vec{a} e \vec{b} , com \vec{a} e $-\vec{b}$ os catetos e $\vec{a} + \vec{b}$ a hipotenusa de um triângulo retângulo, mostra que o produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ de vetores ortogonais deve ser sempre zero. Com esta definição, numa base ortonormada cartesiana em que $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$ e $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$ tem-se que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

donde se pode concluir que o produto escalar assim definido (a partir da distância cartesiana) é uma **forma bilinear simétrica não-degenerada real** sobre \mathbb{V} . De facto

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \forall \vec{b} \in \mathbb{V} \quad \text{SSE} \quad \vec{a} = \mathbf{0}$$

2.2.1 Propriedades:

Simetria/Comutatividade: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Linearidade/Distributividade: $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \mu \vec{a} \cdot \vec{c}$

2.2.2 Produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta_{ab})$

Vamos agora mostrar que a expressão para o produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ de dois vetores se pode também escrever

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta_{ab})$$

onde θ_{ab} representa o ângulo entre os vetores \vec{a} , \vec{b} . Relembrando que, em termos de cosenos diretores,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= |\vec{a}| \vec{e}_a = |\vec{a}| (\cos(\theta_{ax}) \vec{e}_x + \cos(\theta_{ay}) \vec{e}_y + \cos(\theta_{az}) \vec{e}_z) \\ \vec{b} &= |\vec{b}| \vec{e}_b = |\vec{b}| (\cos(\theta_{bx}) \vec{e}_x + \cos(\theta_{by}) \vec{e}_y + \cos(\theta_{bz}) \vec{e}_z) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}||\vec{b}| (\cos(\theta_{ax})\cos(\theta_{bx}) + \cos(\theta_{ay})\cos(\theta_{by}) + \cos(\theta_{az})\cos(\theta_{bz}))\end{aligned}\tag{2.1}$$

Se \vec{a} e \vec{b} pertencessem ao plano \mathbb{P}_1 , então $\theta_{az} = \theta_{bz} = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_{ay} = \frac{\pi}{2} - \theta_{ax}$, $\theta_{by} = \frac{\pi}{2} - \theta_{bx}$ donde

$$\begin{aligned}\cos(\theta_{ax})\cos(\theta_{bx}) + \cos(\theta_{ay})\cos(\theta_{by}) + \cos(\theta_{az})\cos(\theta_{bz}) &= \\ &= \cos(\theta_{ax})\cos(\theta_{bx}) + \sin(\theta_{ax})\sin(\theta_{bx}) = \cos(\theta_{ax} - \theta_{bx}) = \cos(\theta_{ab})\end{aligned}$$

e portanto $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta_{ab})$ neste caso. Acontece que o produto escalar é invariante para transformações ortogonais dos seus argumentos (i.e. rotações): de facto

$$\langle \mathbb{A} \cdot \vec{a}, \mathbb{A} \cdot \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \mathbb{A}^T \mathbb{A} \cdot \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

já que $\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \mathbf{1}$ por definição para tais transformações. Assim é sempre possível rodar um par arbitrário \vec{a} , \vec{b} para o plano \mathbb{P}_1 sem alterar o seu produto escalar, que deverá então ser sempre $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta_{ab})$.

Como corolário deduzimos também a partir de (2.1) e

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b \quad ; \quad \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = \cos(\theta_{ab})$$

que em geral

$$\cos(\theta_{ab}) = \cos(\theta_{ax})\cos(\theta_{bx}) + \cos(\theta_{ay})\cos(\theta_{by}) + \cos(\theta_{az})\cos(\theta_{bz})$$

e se $\theta_{ab} = 0$ obtemos a identidade geral dos cosenos diretores

$$1 = \cos^2(\theta_{ax}) + \cos^2(\theta_{ay}) + \cos^2(\theta_{az})$$

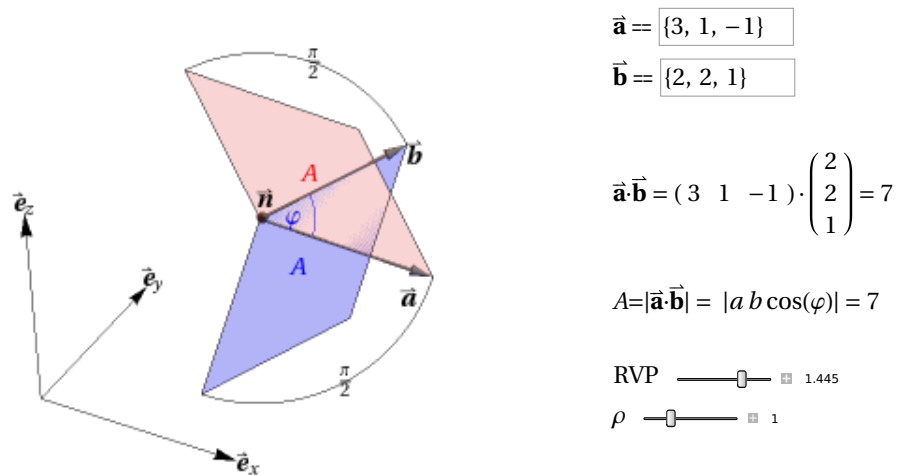


Figura 2.1: Geometricamente o **Produto Escalar** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ representa a área A porque $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi = ab \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})$.

2.2.3 $\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}_{||}| = |\vec{a}_{||}| |\vec{b}|$

Proposição 2.2.1 O produto escalar de dois vetores é proporcional à projeção ortogonal dum deles sobre o outro. Por exemplo, um vetor \vec{b} pode ser representado como a soma das suas projeções $\vec{b}_{||}$ na direção $\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ dum vetor \vec{a} , e \vec{b}_{\perp} numa direção ortogonal a \vec{a}

$$\vec{b} = \vec{b}_{||} + \vec{b}_{\perp} \implies \begin{cases} \vec{b}_{||} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{u}_a) \vec{u}_a \\ \vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u}_a) \vec{u}_a \end{cases}$$

A expressão da componente perpendicular \vec{b}_{\perp} pode-se escrever também em termos do produto vetorial

$$\vec{b}_{\perp} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{u}_a \times (\vec{b} \times \vec{u}_a)$$

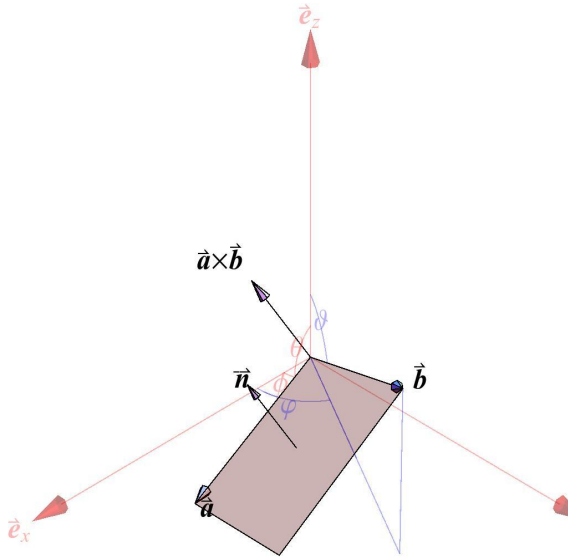


Figura 2.2: O **Produto Vetorial** ou externo de vetores é um vetor cuja magnitude é a área do paralelogramo e a direção é ortogonal a ambos.

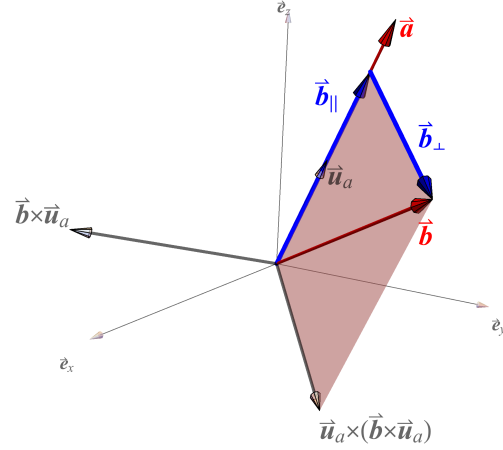


Figura 2.3: Decomposição de um vetor \vec{b} numa componente \vec{b}_\perp , normal a uma direção dada \vec{a} , e numa componente \vec{b}_\parallel , paralela a \vec{a} .

2.3 Produto Vetorial: $\vec{a} \times \vec{b}$

O paralelogramo formado por dois vetores \vec{a} e \vec{b} tem área= (comprimento base)× (altura). O produto vetorial ou externo de vetores representa a área do paralelogramo e a direção ortogonal a ambos. Podemos assim ver que

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \vec{e}_a \times \vec{e}_b \quad ; \quad \vec{e}_a \times \vec{e}_b = \sin(\theta_{ab}) \vec{e}_c \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta_{ab}) \vec{e}_c$$

onde $\vec{e}_c = \frac{1}{|\vec{c}|} \vec{c}$ é o versor de \vec{c} perpendicular ao plano definido por \vec{a} e \vec{b} . Uma forma mnemônica de calcular $\vec{a} \times \vec{b}$ consiste em formar uma matriz simbólica de determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z$$

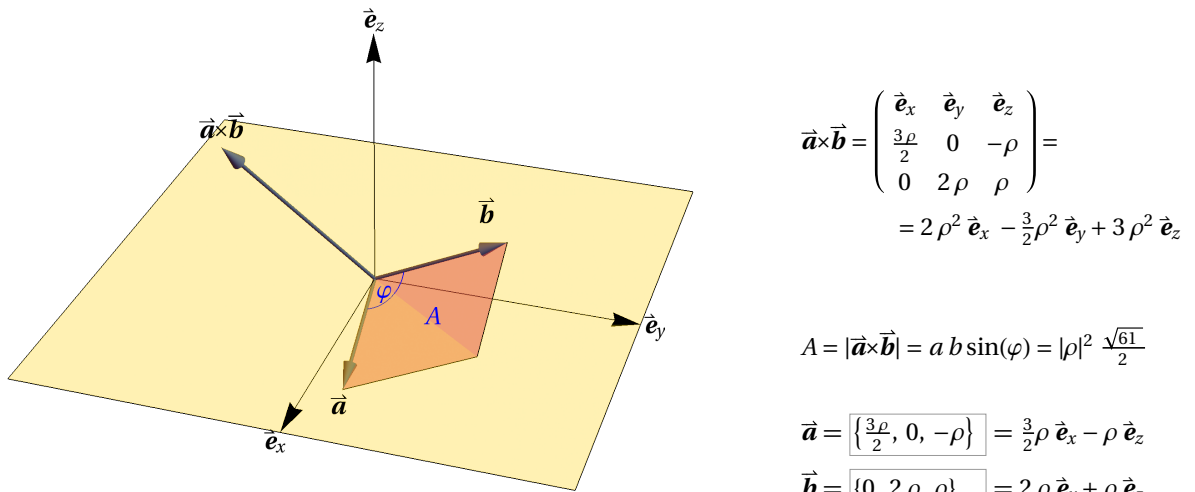
Contudo, na maioria dos casos é mais prático usar as propriedades do produto vetorial conjuntamente com o conhecimento do produto vetorial dos vetores de base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ dois a dois: $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$, para calcular algebricamente produtos de vetores arbitrários $\vec{a} \times \vec{b}$.

2.3.1 Propriedades:

Anti-Simetria: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (2.2a)

Linearidade: $\vec{a} \times (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda \vec{a} \times \vec{b} + \mu \vec{a} \times \vec{c}$ (2.2b)

Inassociatividade: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (2.2c)



$a = \vec{a} = \frac{\sqrt{13} \rho }{2}$	$b = \vec{b} = \sqrt{5} \rho $	$ \vec{a} \times \vec{b} = \frac{\sqrt{61}\rho^2}{2}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\rho^2$
$\sin(\varphi) = \sqrt{\frac{61}{65}}$	$\cos(\varphi) = -\frac{2}{\sqrt{65}}$	$\tan(\varphi) = -\frac{\sqrt{61}}{2}$	$\varphi = 104.36^\circ$

Figura 2.4: Cálculo do produto vetorial de dois vetores \vec{a} , \vec{b} .

2.4 Produto Vectorial Triplo: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Teorema 2.4.1 — Produto vetorial triplo.

O produto vetorial triplo verifica a identidade: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Demonstração 2.4.1

O produto $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ é perpendicular a \vec{a} e portanto, se \vec{b} e \vec{c} não forem colineares,

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) \equiv 0 \quad \therefore \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\alpha \vec{b} + \beta \vec{c}) \equiv 0 = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \beta (\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad \therefore \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda ((\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c})$$

λ não depende de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ porque, para arbitrário \vec{d} ,

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) &= \lambda ((\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d})) = \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{d} \times (\vec{c} \times \vec{b})) = \lambda' ((\vec{d} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{d} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{b})) \quad \therefore \quad \lambda \equiv \lambda' \end{aligned}$$

Usando $\vec{a} = \vec{b} = \vec{e}_x$, $\vec{c} = \vec{e}_y$ obtém-se

$$\vec{e}_x \times (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) = -\lambda \vec{e}_y = \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \quad \therefore \quad \lambda \equiv 1$$

2.5 Produto Misto: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}$

Teorema 2.5.1 — Produto Misto.

O Produto Misto de três vetores representa o volume do paralelepípedo definido por esses vetores.

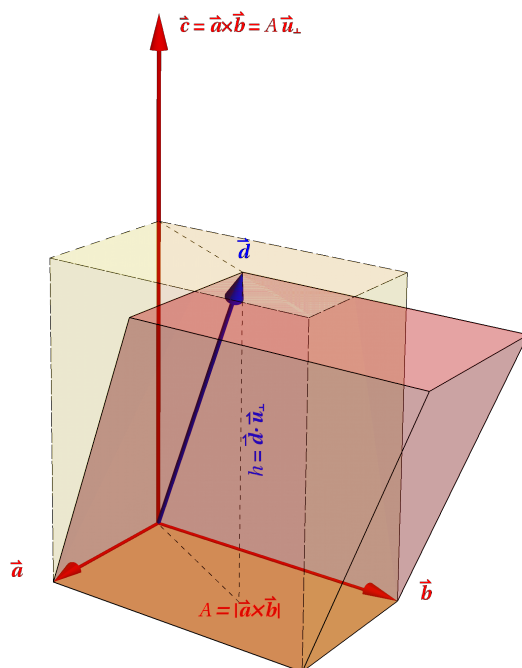


Figura 2.5: Produto misto de três vetores

O paralelepípedo formado pelos vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{d} tem volume = (área da base) × (altura). Assim $\vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ é o volume do paralelepípedo com arestas formadas por esses vetores. Se usarmos \vec{a} e \vec{b} para definir a base, de área $A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}|$, a altura do paralelepípedo será $h = \vec{d} \cdot \vec{u}_\perp$, onde $\vec{u}_\perp = \frac{1}{A} \vec{c}$, pelo que $V = A \times h = \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

Como a base pode ser formada por qualquer par de vetores, este volume pode ser determinado de três maneiras:

$$V = \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = \vec{b} \cdot (\vec{d} \times \vec{a})$$

Isto é também evidente a partir da representação

$$\vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \det \begin{pmatrix} d_x & d_y & d_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) d_x + (a_z b_x - a_x b_z) d_y + (a_x b_y - a_y b_x) d_z$$

uma vez que o determinante de uma matriz não muda com rotações cíclicas das suas linhas.

2.6 Coordenadas Polares

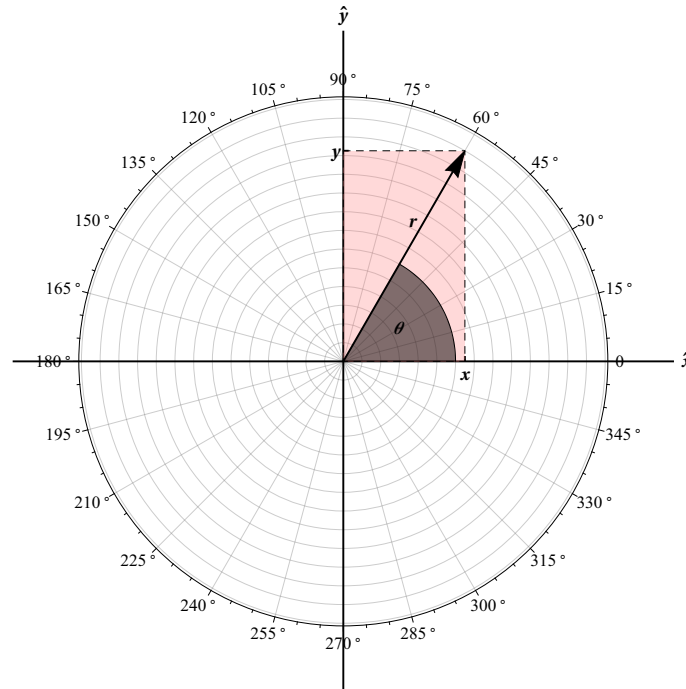


Figura 2.6: Coordenadas Polares $\{r, \theta\}$ dum ponto no plano, com r a distância à origem e θ o ângulo que o vetor posição do ponto faz com uma direção de referência \hat{x} . Em coordenadas cilíndricas usa-se em geral a notação $\{\rho, \phi, z\}$, onde $r \rightarrow \rho$ e $\theta \rightarrow \phi$.

Conversão de coordenadas **Cartesianas** \leftrightarrow **Polares**:

$$\text{Polares} \rightarrow \text{Cartesianas} \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\text{Cartesianas} \rightarrow \text{Polares} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \delta_{1, \text{sgn}(y)} + \left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \frac{3\pi}{2}\right) \delta_{1, -\text{sgn}(y)} \end{cases}$$

NB: (Para derivadas e funções trigonométricas é legítimo usar $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$)

$$\text{Velocidades e Acelerações} \begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{r} = \frac{(y\dot{x} - x\dot{y})^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \ddot{\theta} = \frac{x\ddot{y} - y\ddot{x}}{x^2 + y^2} + 2\frac{(y^2 - x^2)\dot{x}\dot{y} + xy(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

2.7 Cálculo com vetores

2.7.1 Derivação

Definição 2.7.1 — Derivada de um vetor.

- A derivada de um vetor variável $\vec{a}(t)$ calcula-se derivando as componentes desse vetor quando escrito em termos de um referencial fixo:
- A derivada do produto de uma função variável $\lambda(t)$ por um vetor variável $\vec{a}(t)$ calcula-se aplicando as regras convencionais para a derivada do produto:
- Por linearidade, esta regra estende-se a qualquer dos produtos escalares ou vetoriais definidos anteriormente,

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{da_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{da_z}{dt} \vec{e}_z$$

$$\frac{d(\lambda \vec{a})}{dt} = \lambda \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \vec{a}$$

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} \quad (2.3)$$

$$\frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} \quad (2.4)$$

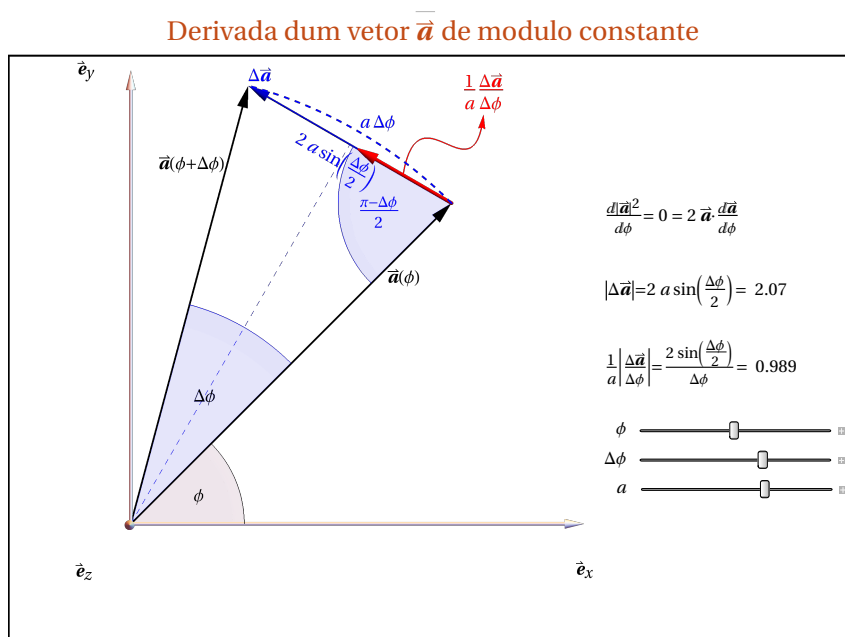


Figura 2.7: Derivada dum vetor \vec{a} de módulo constante.

A partir de (2.3) pode-se concluir que a derivada dum vetor de magnitude constante é sempre perpendicular ao vetor. De facto, se $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = const.$ então

$$\frac{d|\vec{a}|^2}{dt} \equiv \frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$$

o que significa $\frac{d\vec{a}}{dt} \perp \vec{a}$. Existe assim um vetor velocidade angular $\vec{\omega}_a$, perpendicular ao plano formado por \vec{a} e $\frac{d\vec{a}}{dt}$, de forma a poder-se escrever

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega}_a \times \vec{a}. \quad (2.5)$$

onde $\omega_a = \frac{d\phi}{dt}$.

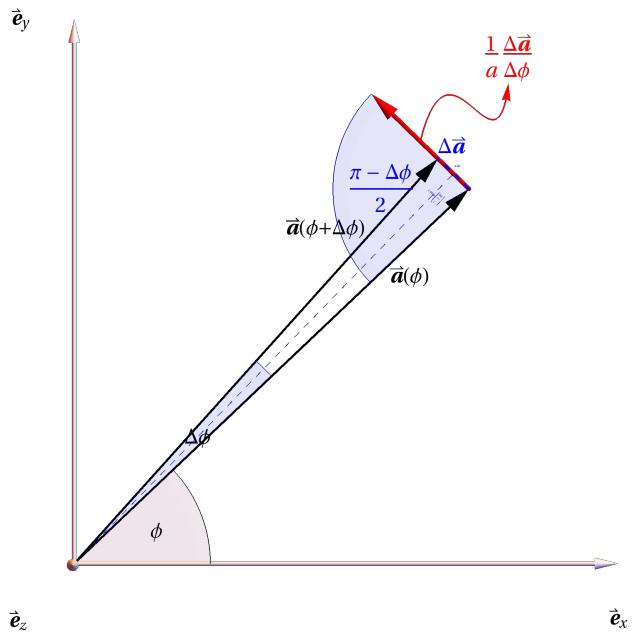


Figura 2.8: Variação infinitesimal de um vetor de magnitude $|\vec{a}|$ constante.

■ Exemplo 2.1 REFERENCIAL MÓVEL CILÍNDRICO

Quando se usam coordenadas cilíndricas $\{\rho, \phi, z\}$ (ditas polares no plano horizontal), o referencial formado em cada ponto $\{\rho_o, \phi_o, z_o\}$ pelas direções tangentes às curvas que se obtêm fazendo variar uma das coordenadas do ponto, enquanto se mantêm as outras constantes, diz-se naturalmente adaptado a estas coordenadas. Para os movimentos dos versores de base deste referencial, pode-se definir um vetor único $\vec{\omega}_c$ tal que:

$$\vec{\omega}_c = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_z$$

verificando-se então

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{e}_\rho = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho \equiv \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\phi \\ \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{e}_\phi = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_z \times \vec{e}_\phi \equiv -\frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\rho \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{e}_z \equiv 0 \end{cases}$$

■

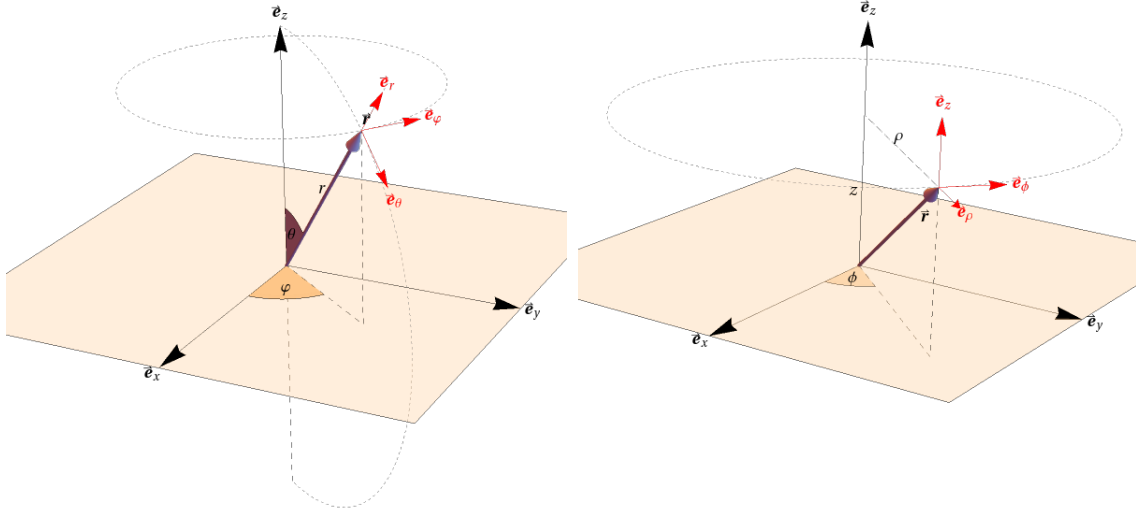


Figura 2.9: Referencial de coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ Figura 2.10: Referencial de coordenadas cilíndricas $\{\rho, \phi, z\}$

■ Exemplo 2.2 REFERENCIAL MÓVEL ESFÉRICO

No caso de se usarem coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ no espaço, o movimento dos versores de base é controlado por um vetor $\vec{\omega}_s$. Neste caso:

$$\vec{\omega}_s = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_z + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\phi \equiv \frac{d\phi}{dt} (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta) + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\phi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\omega}_s \times \vec{e}_r = -\frac{d\phi}{dt} \sin(\theta) \vec{e}_\theta \times \vec{e}_r + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r \equiv \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \frac{d\phi}{dt} \sin(\theta) \vec{e}_\phi \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\omega}_s \times \vec{e}_\theta = \frac{d\phi}{dt} \cos(\theta) \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\phi \times \vec{e}_\theta \equiv -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r + \frac{d\phi}{dt} \cos(\theta) \vec{e}_\phi \\ \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = \vec{\omega}_s \times \vec{e}_\phi = \frac{d\phi}{dt} (\cos(\theta) \vec{e}_r \times \vec{e}_\phi - \sin(\theta) \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi) \equiv -\frac{d\phi}{dt} \sin(\theta) \vec{e}_r - \frac{d\phi}{dt} \cos(\theta) \vec{e}_\theta \end{array} \right.$$

Em resumo, nos referenciais móveis associados a coordenadas cilíndricas e esféricas

verificam-se as seguintes identidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \equiv \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\phi \\ \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} \equiv -\frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\rho \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} \equiv 0 \end{array} \right.$$

Coord. Cilíndricas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{e}_r}{dt} \equiv \frac{d\varphi}{dt} \sin(\theta) \vec{e}_\varphi + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \equiv \frac{d\varphi}{dt} \cos(\theta) \vec{e}_\varphi - \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r \\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \equiv -\frac{d\varphi}{dt} \cos(\theta) \vec{e}_\theta - \frac{d\varphi}{dt} \sin(\theta) \vec{e}_r \end{array} \right.$$

Coord. Esféricas

2.7.2 Velocidade e aceleração

2.7.2.1 Decomposição radial-transversal

Dada uma curva parametrizada $\vec{r} = \vec{r}(t)$, usando coordenadas esféricas $\{r, \theta, \varphi\}$ podemos ver que a velocidade se escreve, tendo em conta (2.5) e escrevendo $\vec{r} = r \vec{e}_r$,

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + \vec{\omega}_s \times \vec{r}$$

Se $ds = |d\vec{r}|$ representa o comprimento de arco na curva, então a magnitude da velocidade é o comprimento percorrido por unidade de tempo

$$v = \frac{ds}{dt} \equiv |\vec{v}| \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

então de acordo com a

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \rho |\vec{\omega}|$$

2.7.2.2 Decomposição tangente-normal

$$\vec{v} \equiv |\vec{v}| \vec{e}_v \equiv v \vec{e}_v$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_v + \vec{\Omega} \times \vec{v} = a_t \vec{e}_v + a_n \vec{e}_\perp$$

$\vec{\Omega}(\vec{r})$ é um vetor perpendicular ao plano osculador da trajetória no ponto \vec{r} . A sua magnitude é $|\vec{\Omega}| \equiv \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$.

2.7.2.3 Curvatura κ e Raio de Curvatura ρ :

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} \equiv \frac{a_n}{v^2}$$

2.7.2.4 Referencial Móvel de Frenet-Serret

- A curva parametrizada por λ tem um versor tangente $\vec{t}(\lambda) \propto \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda}$.

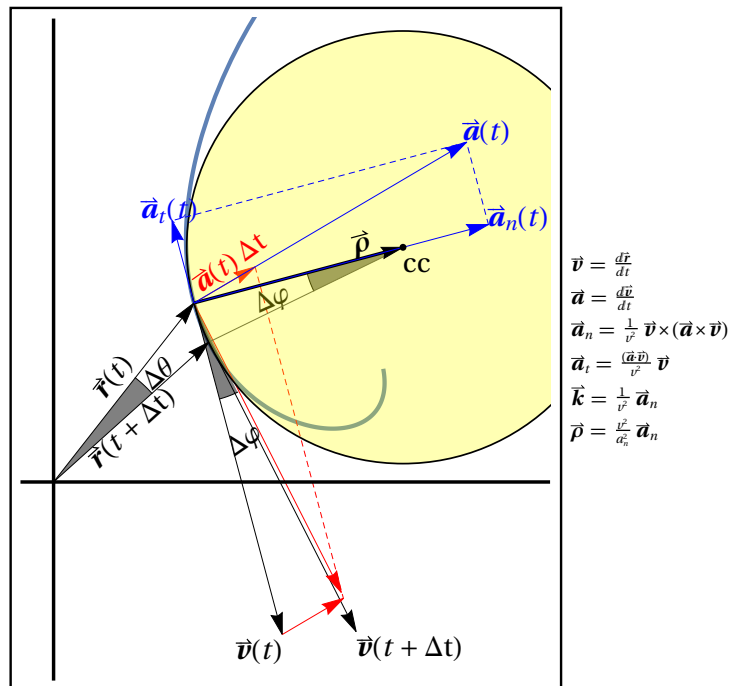


Figura 2.11: Componentes normal \vec{a}_n e tangencial \vec{a}_t da aceleração \vec{a} .

- A componente normal (perpendicular a \vec{t}) da “aceleração” $\frac{d\vec{t}(\lambda)}{d\lambda}$ está dirigida segundo o vetor de curvatura $\vec{k}(\lambda)$ que define a direção da curvatura local.
- Quando $d\lambda = ds$ é o comprimento de arco, a magnitude k é a **curvatura** e o seu inverso ρ o **raio de curvatura**.

- O versor $\vec{n}(\lambda) = k^{-1} \vec{k}(\lambda) = \rho \vec{k}(\lambda)$ designa-se **versor normal**.
- O plano definido por $\vec{n}(\lambda)$ e $\vec{t}(\lambda)$ designa-se **Plano Osculador** (representado pelo retângulo azulado) ao qual a curva é localmente tangente.
- O **versor binormal** $\vec{b}(\lambda) = \vec{t}(\lambda) \times \vec{n}(\lambda)$ é perpendicular ao Plano Osculador em cada ponto.
- Os três vetores $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ formam o **referencial ortonormado de Frenet-Serret**.
- As fórmulas de Frenet-Serret aplicam-se quando $d\lambda = ds$ é o comprimento de arco.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = k \vec{n} & \text{onde } k \text{ é a curvatura local.} \\ \frac{d\vec{b}(s)}{ds} = -\tau \vec{n} & \text{onde } \tau \text{ é a torção local} \\ \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = -k \vec{t} + \tau \vec{b} \end{cases}$$

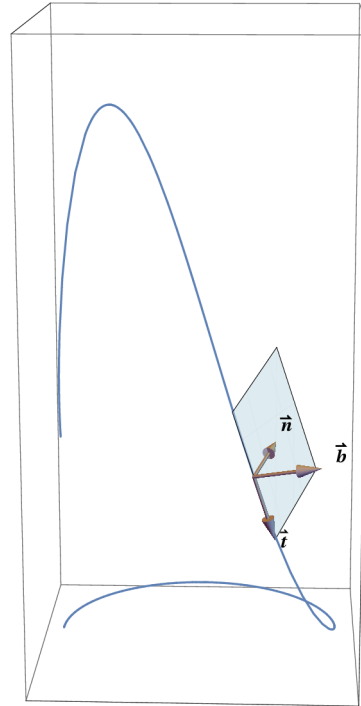


Figura 2.12: Vetores do referencial local de Frenet-Serret e plano osculador num ponto de uma curva.

2.8 Operadores Diferenciais em Coordenadas Cartesianas

2.8.1 Convenção da Soma

Símbolos (ou produtos de símbolos) com índices repetidos uma vez em cima e outra vez em baixo significam uma soma desses símbolos (ou produtos de símbolos) para todos os valores possíveis que esses índices podem tomar:

$$a_i^{ki} \equiv a_1^{k1} + a_2^{k2} + a_3^{k3} + \dots$$

$$a_k b_j^k \equiv a_1 b_j^1 + a_2 b_j^2 + a_3 b_j^3 + \dots$$

$$a_i b_k^i \equiv (a_1 b_1^1 + a_2 b_1^2 + a_3 b_1^3 + \dots) + (a_1 b_2^1 + a_2 b_2^2 + a_3 b_2^3 + \dots) + (a_1 b_3^1 + a_2 b_3^2 + a_3 b_3^3 + \dots) + \dots$$

2.8.2 Deltas de Kronecker δ_i^j e Símbolo Antisimétrico ε^{ijk}

O símbolo delta de Kronecker é uma função característica do conjunto discreto dos índices.

$$\delta_j^i, \delta^{ij} \text{ ou } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Por exemplo, se $b_j = \frac{\partial \psi}{\partial x^j}$ então $\delta^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} = b^i$. O símbolo delta de segunda ordem é

$$\delta_{rs}^{ij} \equiv \delta_r^i \delta_s^j - \delta_s^i \delta_r^j$$

O tensor totalmente anti-simétrico de ordem 3 é o tensor de Levi-Civita representado pelo símbolo

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = \begin{cases} 1 & \text{se } i_1 i_2 i_3 = \sigma(123) \text{ for uma permutação par} \\ -1 & \text{se } i_1 i_2 i_3 = \sigma(123) \text{ for uma permutação ímpar} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{\dots i_2 i_3}^{i_1} = \delta^{i_1 k} \varepsilon_{k i_2 i_3} \\ \varepsilon_{\dots i_3}^{i_1 i_2} = \delta^{i_1 k} \delta^{i_2 j} \varepsilon_{k j i_3} \\ \varepsilon^{i_1 i_2 i_3} = \delta^{i_1 k} \delta^{i_2 j} \delta^{i_3 l} \varepsilon_{k j l} \\ \varepsilon_{\dots k}^{ij} \varepsilon_{rs}^k = \delta_r^i \delta_s^j - \delta_s^i \delta_r^j \equiv \delta_{rs}^{ij} \end{cases}$$

donde se deduz

$$\begin{aligned} \delta^{ij} \delta_{rs} &= \delta_k^i \delta^{kj} \delta_r^t \delta_{ts} = (\delta_{kr}^{it} + \delta_r^i \delta_k^t) \delta^{kj} \delta_{ts} = (\varepsilon_{\dots u}^{it} \varepsilon_{kr}^u + \delta_r^i \delta_k^t) \delta^{kj} \delta_{ts} = \varepsilon_{\dots su}^i \varepsilon_{\dots r}^{uj} + \delta_r^i \delta_s^j = \varepsilon_{\dots ru}^i \varepsilon_{\dots s}^{uj} + \delta_s^i \delta_r^j \\ &\vdots \\ \varepsilon_{\dots su}^i \varepsilon_{\dots r}^{uj} &= \delta^{ij} \delta_{rs} - \delta_r^i \delta_s^j \end{aligned}$$

2.8.3 Identidades com operadores vectoriais

Gradiente

2.8.3.1 Operador Gradiente

O gradiente ∇f de uma função $f \in C^1_{\mathbb{R}}$ é determinado pela relação genérica

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla \psi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \delta^{ij} \vec{e}_i$$

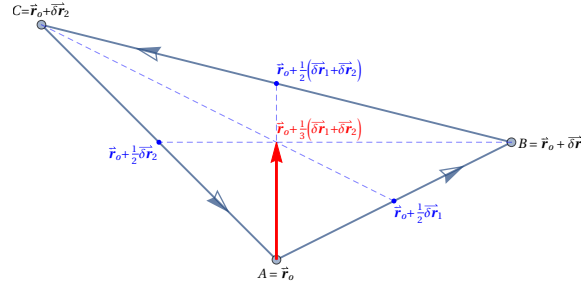
$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$ 1	$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$	$\nabla (\vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{k}$
---	--	--

$$\nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad 2$$

$$\begin{aligned} 1 \quad \vec{e}_i \delta^{ij} \frac{\partial \sqrt{\delta_{rs} x^r x^s}}{\partial x^j} &= \vec{e}_i \delta^{ij} \frac{\delta_{rs}}{2\sqrt{\delta_{rs} x^r x^s}} \frac{\partial (x^r x^s)}{\partial x^j} = \vec{e}_i \delta^{ij} \frac{\delta_{rs} (\delta_j^r x^s + \delta_j^s x^r)}{2\sqrt{\delta_{rs} x^r x^s}} = \vec{e}_i \delta^{ij} \frac{\delta_{js} x^s + \delta_{rj} x^r}{2\sqrt{\delta_{rs} x^r x^s}} = \\ &= \vec{e}_i \frac{\delta_{js} x^s + \delta_{rj} x^r}{2\sqrt{\delta_{rs} x^r x^s}} = \frac{x^i}{\sqrt{\delta_{rs} x^r x^s}} \vec{e}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \vec{e}_i \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} (\delta_{rs} a^r b^s) &= \delta^{ij} \delta_{rs} \vec{e}_i b^s \frac{\partial a^r}{\partial x^j} + \delta^{ij} \delta_{sr} \vec{e}_i a^r \frac{\partial b^s}{\partial x^j} = (\varepsilon_{\dots su}^i \varepsilon_{\dots r}^{uj} + \delta_r^i \delta_s^j) \vec{e}_i b^s \frac{\partial a^r}{\partial x^j} + (\varepsilon_{\dots ru}^i \varepsilon_{\dots s}^{uj} + \delta_s^i \delta_r^j) \vec{e}_i a^r \frac{\partial b^s}{\partial x^j} = \\ &= \vec{e}_i \left(\varepsilon_{\dots su}^i b^s \varepsilon_{\dots r}^{uj} \frac{\partial a^r}{\partial x^j} \right) + b^j \frac{\partial a^r}{\partial x^j} \vec{e}_r + \vec{e}_i \left(\varepsilon_{\dots ru}^i a^r \varepsilon_{\dots s}^{uj} \frac{\partial b^s}{\partial x^j} \right) + a^j \frac{\partial b^s}{\partial x^j} \vec{e}_s \end{aligned}$$

Rotacional

Figura 2.13: Circulação elementar e rotacional dum campo vetorial \vec{A}

Vamos calcular a circulação dum campo de vetores $\vec{A}(\vec{r})$ num triângulo com vértices $A = \vec{r}_o, B = \vec{r}_o + \vec{\delta r}_1, C = \vec{r}_o + \vec{\delta r}_2$, onde $\vec{\delta r}_1 \neq \lambda \vec{\delta r}_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Vamos assumir que o sentido de circulação é positivo quando percorrido de $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$. Assumimos também que $\vec{\delta r}_1$ e $\vec{\delta r}_2$ são deslocamentos infinitesimais. Assim a circulação pode ser aproximada por³

$$\oint_{ABC} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \simeq \vec{\delta r}_1 \cdot \vec{A}\left(\vec{r}_o + \frac{1}{2} \vec{\delta r}_1\right) + (\vec{\delta r}_2 - \vec{\delta r}_1) \cdot \vec{A}\left(\vec{r}_o + \frac{1}{2} (\vec{\delta r}_1 + \vec{\delta r}_2)\right) - \vec{\delta r}_2 \cdot \vec{A}\left(\vec{r}_o + \frac{1}{2} \vec{\delta r}_2\right) \quad (2.6)$$

Designando por $\vec{r}_c = \vec{r}_o + \frac{1}{2} (\vec{\delta r}_1 + \vec{\delta r}_2)$ o ponto onde o campo é avaliado, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\oint_{ABC} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \simeq \vec{\delta r}_1 \cdot \vec{A}\left(\vec{r}_c - \frac{1}{2} \vec{\delta r}_2\right) + (\vec{\delta r}_2 - \vec{\delta r}_1) \cdot \vec{A}(\vec{r}_c) - \vec{\delta r}_2 \cdot \vec{A}\left(\vec{r}_c - \frac{1}{2} \vec{\delta r}_1\right)$$

Designando por $\nabla \vec{A}(\vec{r})$ a matriz derivada do campo \vec{A} , podemos expandir as expressões de $\vec{A}(\vec{r})$ na vizinhança de \vec{r}_c e obter $\vec{A}(\vec{r}_c + \vec{\delta r}) = \vec{A}(\vec{r}_c) + \nabla \vec{A}(\vec{r}_c) \cdot \vec{\delta r} + o(\delta r^2)$ pelo que

$$\begin{aligned} \oint_{ABC} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &\simeq \vec{\delta r}_1 \cdot \vec{A}(\vec{r}_c) - \frac{1}{2} \vec{\delta r}_1 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_c) \cdot \vec{\delta r}_2 + \\ &+ (\vec{\delta r}_2 - \vec{\delta r}_1) \cdot \vec{A}(\vec{r}_c) - \\ &- \vec{\delta r}_2 \cdot \vec{A}(\vec{r}_c) + \frac{1}{2} \vec{\delta r}_2 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_c) \cdot \vec{\delta r}_1 = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{\delta r}_2 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_c) \cdot \vec{\delta r}_1 - \vec{\delta r}_1 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_c) \cdot \vec{\delta r}_2) \end{aligned}$$

O resultado é uma função escalar que é anti-simétrica relativamente a $\vec{\delta r}_1, \vec{\delta r}_2$, e depende linearmente apenas das derivadas cruzadas das componentes de $\vec{A}(\vec{r}_c)$, pelo que podemos definir o rotacional

³ Note-se que se se inverter o sentido da circulação para $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ a expressão usada (2.6) avaliando o campo \vec{A} nos pontos intermédios dá o negativo da circulação no sentido anterior, como deve ser. Não se obteria o mesmo resultado se se avaliasse o campo nos vértices do percurso elementar já que a circulação em sentido retrógrado não é o negativo da direta:

$$\begin{aligned} \vec{\delta r}_1 \cdot \vec{A}(\vec{r}_o) + (\vec{\delta r}_2 - \vec{\delta r}_1) \cdot \vec{A}(\vec{r}_o + \vec{\delta r}_1) - \vec{\delta r}_2 \cdot \vec{A}(\vec{r}_o + \vec{\delta r}_2) \neq \\ - (\vec{\delta r}_2 \cdot \vec{A}(\vec{r}_o) + (\vec{\delta r}_1 - \vec{\delta r}_2) \cdot \vec{A}(\vec{r}_o + \vec{\delta r}_2) - \vec{\delta r}_1 \cdot \vec{A}(\vec{r}_o + \vec{\delta r}_1)) \end{aligned}$$

Contudo, a média da diferença das duas circulações assim definidas volta a dar uma circulação anti-simétrica cujo valor se pode deduzir como sendo

$$\frac{1}{2} (\vec{\delta r}_1 \times \vec{\delta r}_2) \cdot \nabla \times \vec{A}(\vec{r}_o) = \Delta S \vec{n} \cdot \nabla \times \vec{A}(\vec{r}_o) \quad 45$$

do campo \vec{A} em \vec{r}_c como o campo designado por $\nabla \times \vec{A}(\vec{r}_c)$ que verifica⁴

$$\oint_{ABC} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \approx \frac{1}{2} \left(\vec{\delta r}_2 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_c) \cdot \vec{\delta r}_1 - \vec{\delta r}_1 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_c) \cdot \vec{\delta r}_2 \right) \equiv \frac{1}{2} \left(\vec{\delta r}_1 \times \vec{\delta r}_2 \right) \cdot \left(\nabla \times \vec{A}(\vec{r}_c) \right)$$

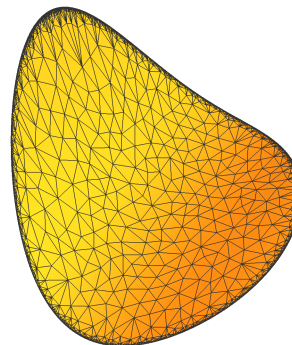
Note que o produto vetorial $\vec{\delta r}_1 \times \vec{\delta r}_2 = 2\Delta S \vec{n}$, onde ΔS é a área do triângulo ABC e \vec{n} a direção normal ao seu plano no sentido positivo. Obtemos assim que

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \left(\nabla \times \vec{A}(\vec{r}_c) \right) &= \frac{1}{\Delta S} \oint_{ABC} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \\ &= \frac{1}{|\vec{\delta r}_1 \times \vec{\delta r}_2|} \left(\vec{\delta r}_2 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_c) \cdot \vec{\delta r}_1 - \vec{\delta r}_1 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_c) \cdot \vec{\delta r}_2 \right) \quad (2.7) \end{aligned}$$

É importante notar que o mesmo resultado se obteria escolhendo $\vec{r}_c = \vec{r}_o + \alpha \vec{\delta r}_1 + \beta \vec{\delta r}_2$ qualquer outro ponto do triângulo. De facto o resultado anterior apenas depende da qualidade das expansões de Taylor para os valores do campo na vizinhança dos pontos intermédios onde a circulação é estimada, por isso o ponto mais favorável será o centroide $\vec{r}_c = \vec{r}_o + \frac{1}{3} (\delta \vec{r}_1 + \delta \vec{r}_2)$.

De qualquer forma, no limite $\Delta S \rightarrow 0$, todas as escolhas do ponto \vec{r}_c tornam-se coincidentes com \vec{r}_o .

Note-se ainda que qualquer superfície pode ser aproximada por malhas triangulares mais ou menos finas, e que a circulação em malhas adjacentes cancela-se em todos os lados exceto nos que se situam isolados nos bordos da superfície. Assim, a soma de todas as circulações elementares acaba por ser a circulação no bordo da superfície, mas então a soma das circulações é o fluxo total do rotacional do campo através da superfície dada.



$$\oint_{\partial S} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \sum_k \Delta S_k \vec{n}_k \cdot \left(\nabla \times \vec{A}(\vec{r}_k) \right) = \iint_S \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})$$

Em coordenadas cartesianas $d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$ donde

$$\begin{aligned} d\vec{A}(\vec{r}) &= dA_x \vec{e}_x + dA_y \vec{e}_y + dA_z \vec{e}_z = \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \right) \vec{e}_x + \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} dx + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \right) \vec{e}_y + \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

⁴ Em geral, dada uma matriz M

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot M \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot M \cdot \vec{b} &= b^k a_j M_k^j - a^k b_j M_k^j = \\ &= a_s b_r \left(\delta^{kr} \delta_j^s - \delta^{ks} \delta_j^r \right) M_k^j = \varepsilon_{ij}^k \varepsilon^{isr} a_s b_r M_k^j = (\vec{a} \times \vec{b})^i (\varepsilon_{ij}^k M_k^j) \end{aligned}$$

$$d\vec{A} = \nabla\vec{A} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \implies \nabla\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Substituindo esta expressão na equação (2.7) obtemos em geral

$$\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) n_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) n_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) n_z$$

Em coordenadas cartesianas o rotacional do campo $\vec{A}(\vec{r})$ pode escrever-se portanto como

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

ou o determinante simbólico de uma matriz particular:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}_{\vec{r}=\vec{r}_c}$$

Em coordenadas cilíndricas o deslocamento elementar é $d\vec{r} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$ e o campo $\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$ donde⁵

$$\begin{aligned} d\vec{A}(\vec{r}) &= dA_\rho \vec{e}_\rho + dA_\varphi \vec{e}_\varphi + dA_z \vec{e}_z + A_\rho d\vec{e}_\rho + A_\varphi d\vec{e}_\varphi = \\ &= (dA_\rho - A_\varphi d\varphi) \vec{e}_\rho + (dA_\varphi + A_\rho d\varphi) \vec{e}_\varphi + dA_z \vec{e}_z = \\ &= \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} d\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - A_\varphi \right) d\varphi + \frac{\partial A_\rho}{\partial z} dz \right) \vec{e}_\rho + \\ &\quad \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} d\rho + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + A_\rho \right) d\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} dz \right) \vec{e}_\varphi + \\ &\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \nabla\vec{A} \cdot \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\varphi \\ dz \end{pmatrix} \implies \nabla\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - A_\varphi \right) & \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + A_\rho \right) & \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

⁵ Note que em coordenadas cilíndricas as variações elementares dos versores de referência $d\vec{e}_\rho = d\varphi \vec{e}_\varphi$ enquanto $d\vec{e}_\varphi = -d\rho \vec{e}_\rho$

Assim, substituindo $\delta\vec{r}_1 = \delta\rho_1 \vec{e}_\rho + \rho\delta\varphi_1 \vec{e}_\varphi + \delta z_1 \vec{e}_z$ e $\delta\vec{r}_2 = \delta\rho_2 \vec{e}_\rho + \rho\delta\varphi_2 \vec{e}_\varphi + \delta z_2 \vec{e}_z$ na expressão (2.7) acima obtemos a identidade

$$\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) n_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) n_\varphi + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - A_\varphi \right) \right) n_z$$

Em coordenadas cilíndricas o rotacional do campo $\vec{A}(\vec{r})$ pode escrever-se

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - A_\varphi \right) \right) \vec{e}_z = \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \rho \vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \right) \end{aligned}$$

ou ainda $\frac{1}{\rho}$ vezes o determinante simbólico duma matriz

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

Em coordenadas esféricas o deslocamento elementar é $d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi$ e o campo $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$ donde ⁶

$$\begin{aligned} d\vec{A}(\vec{r}) &= dA_r \vec{e}_r + dA_\theta \vec{e}_\theta + dA_\varphi \vec{e}_\varphi + A_r d\vec{e}_r + A_\theta d\vec{e}_\theta + A_\varphi d\vec{e}_\varphi = \\ &= (dA_r - A_\theta d\theta - \sin(\theta) A_\varphi d\varphi) \vec{e}_r + \\ &+ (dA_\theta + A_r d\theta - \cos(\theta) A_\varphi d\varphi) \vec{e}_\theta + \\ &+ (dA_\varphi + \sin(\theta) A_r d\varphi + \cos(\theta) A_\theta d\varphi) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} d\vec{A}(\vec{r}) &= \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} dr + \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - A_\theta \right) d\theta + \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin(\theta) A_\varphi \right) d\varphi \right) \vec{e}_r + \\ &+ \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} dr + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_r \right) d\theta + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \cos(\theta) A_\varphi \right) d\varphi \right) \vec{e}_\theta + \\ &+ \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} d\theta + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \sin(\theta) A_r + \cos(\theta) A_\theta \right) d\varphi \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

pelo que podemos deduzir que

⁶ Note que neste referencial adaptado às coordenadas esféricas as variações elementares dos versores de referência são

$$d\vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta + \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi \quad ; \quad d\vec{e}_\theta = -d\theta \vec{e}_r + \cos(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi \quad ; \quad d\vec{e}_\varphi = -\sin(\theta) d\varphi \vec{e}_r - \cos(\theta) d\varphi \vec{e}_\theta$$

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \nabla\vec{A} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin(\theta) d\varphi \end{pmatrix} \implies \nabla\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - A_\theta \right) & \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin(\theta) A_\varphi \right) \\ \frac{\partial A_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_r \right) & \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \cos(\theta) A_\varphi \right) \\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \sin(\theta) A_r + \cos(\theta) A_\theta \right) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Escrevendo agora $\vec{\delta r}_i = \delta r_i \vec{e}_r + r \delta \theta_i \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) \delta \varphi_i \vec{e}_\varphi$ para $i = 1, 2, 3$ e substituindo na equação (2.7) a expressão (2.10) para a derivada linear $\nabla\vec{A}$ obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\vec{\delta r}_2 \cdot \nabla\vec{A} \cdot \vec{\delta r}_1 - \vec{\delta r}_1 \cdot \nabla\vec{A} \cdot \vec{\delta r}_2 \right) = \Delta S \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A})$$

$$\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \cos(\theta) A_\varphi \right) \right) n_r + \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin(\theta) A_\varphi \right) - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) n_\theta + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - A_\theta \right) \right) n_\varphi$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial(r \sin(\theta) A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin(\theta) A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin(\theta) \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin(\theta) A_\varphi \end{vmatrix}$$

2.8.3.2 Identidades Vetoriais com o Operador Rotacional

Em coordenadas cartesianas

$\nabla \times \vec{a} \equiv \varepsilon_{..k}^{ij} \frac{\partial a^k}{\partial x^j} \vec{e}_i$			
$\nabla \times \vec{r} = 0$ <i>a</i>	$\nabla \times \vec{e}_r = 0$	$\nabla \times \vec{e}_\phi = \frac{1}{\rho} \vec{e}_z$ <i>b</i>	$\nabla \times \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \vec{e}_\phi$
$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\nabla \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\nabla \cdot \vec{a}) \vec{b}$ <i>c</i>			
$\nabla \times (\psi \vec{a}) = \nabla \psi \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}$ <i>d</i>			
$\nabla \times (r \vec{e}_r) = \nabla r \times \vec{e}_r + r \nabla \times \vec{e}_r = 0$			
$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$ <i>e</i>			
$\nabla \times (\nabla \psi) = 0$ <i>f</i>			

$$^a \quad \nabla \times \vec{r} = \vec{e}_i \frac{\partial x^k}{\partial x^j} \varepsilon_{..k}^{ij} = \vec{e}_i \delta_j^k \varepsilon_{..k}^{ij} = \vec{e}_i \varepsilon_{..j}^{ij} \equiv 0$$

$$^b \quad \nabla \times \vec{e}_\phi = \nabla \times (\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho) = (\vec{e}_\rho \cdot \nabla) \vec{e}_z - (\vec{e}_z \cdot \nabla) \vec{e}_\rho + (\nabla \cdot \vec{e}_\rho) \vec{e}_z - (\nabla \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \vec{e}_z$$

$$^c \quad \varepsilon_{..k}^{ij} \vec{e}_i \frac{\partial (\varepsilon_{rs}^k a^r b^s)}{\partial x^j} = \delta_{rs}^{ij} \vec{e}_i \left(\frac{\partial (a^r b^s)}{\partial x^j} \right) = \vec{e}_i \left(\frac{\partial (a^i b^j)}{\partial x^j} \right) - \vec{e}_i \left(\frac{\partial (a^j b^i)}{\partial x^j} \right) = \vec{e}_i \left(b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} - a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j} \right) + \vec{e}_i \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^j} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^j} \right)$$

$$^d \quad \varepsilon_{..k}^{ij} \vec{e}_i \frac{\partial (\psi a^k)}{\partial x^j} = \varepsilon_{..k}^{ij} \vec{e}_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} a^k + \psi \frac{\partial a^k}{\partial x^j} \right)$$

$$^e \quad \varepsilon_{..k}^{ij} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\varepsilon^{kr} s \frac{\partial a^s}{\partial x^r} \right) = \delta_{rs}^{ij} \delta^{tr} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{\partial a^s}{\partial x^j} \right) = \vec{e}_i \delta^{ir} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{\partial a^j}{\partial x^j} \right) - \vec{e}_i \delta^{jr} \frac{\partial^2 a^i}{\partial x^r \partial x^j}$$

$$^f \quad \varepsilon_{..k}^{ij} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta^{kr} \frac{\partial \psi}{\partial x^r} \right) = \varepsilon^{ijr} \vec{e}_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j \partial x^r} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijr} \vec{e}_i \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j \partial x^r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^r \partial x^j} \right)$$

Divergência

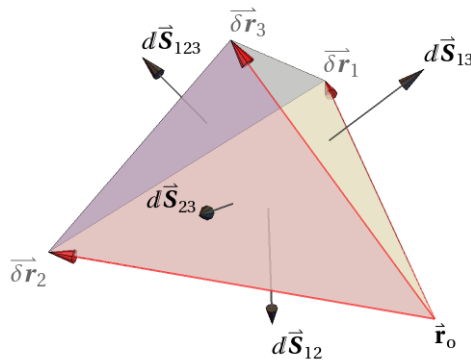
Vamos calcular o fluxo de um campo de vetores \vec{A} na superfície dum tetraedro gerado por três deslocamentos elementares $\vec{\delta r}_1, \vec{\delta r}_2, \vec{\delta r}_3$ tal que $(\vec{\delta r}_1 \times \vec{\delta r}_2) \cdot \vec{\delta r}_3 \neq 0$. As superfícies elementares são os triângulos definidos por

$$\begin{aligned} d\vec{S}_{12} &= \frac{1}{2} \vec{\delta r}_2 \times \vec{\delta r}_1 \quad ; \quad d\vec{S}_{23} = \frac{1}{2} \vec{\delta r}_3 \times \vec{\delta r}_2 \quad ; \quad d\vec{S}_{13} = \frac{1}{2} \vec{\delta r}_1 \times \vec{\delta r}_3 \\ d\vec{S}_{123} &= \frac{1}{2} (\vec{\delta r}_1 - \vec{\delta r}_3) \times (\vec{\delta r}_2 - \vec{\delta r}_3) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Note-se que os centroides das faces deste tetraedro são

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_o + \frac{1}{3}(\vec{\delta r}_i + \vec{\delta r}_j) \quad ; \quad \vec{r}_{123} = \vec{r}_o + \frac{1}{3}(\vec{\delta r}_1 + \vec{\delta r}_2 + \vec{\delta r}_3) \quad (2.12)$$

pele que iremos calcular aí os valores do campo \vec{A} ao aproximar o seu fluxo $\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ através da superfície do tetraedro.



$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = d\vec{S}_{12} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{12}) + d\vec{S}_{23} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{23}) + d\vec{S}_{13} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{13}) + d\vec{S}_{123} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{123}) \quad (2.13)$$

Utilizando as expressões para $d\vec{S}_{ij}$ e \vec{r}_{ij} definidas em (2.11) e (2.12), e a expansão de Taylor para \vec{A} na vizinhança de \vec{r}_o na forma de

$$\vec{A}(\vec{r}_o + \vec{\delta r}) \approx \vec{A}(\vec{r}_o) + \nabla \vec{A}(\vec{r}_o) \cdot \vec{\delta r}$$

onde $\nabla \vec{A}(\vec{r}_o)$ representa a derivada linear de \vec{A} em \vec{r}_o , podemos substituir em (2.13) as expressões anteriores notando que o termo constante $\vec{A}(\vec{r}_o)$ factoriza e multiplica a expressão

$$\vec{\delta r}_1 \times \vec{\delta r}_3 + \vec{\delta r}_2 \times \vec{\delta r}_1 + \vec{\delta r}_3 \times \vec{\delta r}_2 + (\vec{\delta r}_1 - \vec{\delta r}_3) \times (\vec{\delta r}_2 - \vec{\delta r}_3) = 0$$

Obtemos assim ⁷

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \frac{1}{6} \left(\vec{\delta r}_1 \times \vec{\delta r}_2 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_o) \cdot \vec{\delta r}_3 + \right. \\ &+ \vec{\delta r}_2 \times \vec{\delta r}_3 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_o) \cdot \vec{\delta r}_1 + \\ &\left. + \vec{\delta r}_3 \times \vec{\delta r}_1 \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}_o) \cdot \vec{\delta r}_2 \right) = \\ &= \frac{1}{6} \vec{\delta r}_1 \cdot \left(\vec{\delta r}_2 \times \vec{\delta r}_3 \right) Tr \left[\nabla \vec{A}(\vec{r}_o) \right] \end{aligned}$$

Note-se que o volume do tetraedro elementar é

$$\Delta V = \frac{1}{6} \vec{\delta r}_1 \cdot \left(\vec{\delta r}_2 \times \vec{\delta r}_3 \right)$$

pelo que

$$\iint_{\partial(\Delta V)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \Delta V Tr \left[\nabla \vec{A}(\vec{r}_o) \right]$$

e no limite define-se a **Divergência do campo vetorial** \vec{A}

$$\nabla \cdot \vec{A} = Tr \left[\nabla \vec{A}(\vec{r}_o) \right] = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\partial(\Delta V)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Tendo em conta a expressão (2.8) para a derivada linear de \vec{A} em coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ obtemos logo

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

⁷ Dados três vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} em geral podemos escrever

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = \varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k$$

pelo que se $\mathbb{M} = M_i^k \vec{e}_k \otimes \vec{e}^i$ representa uma transformação linear, então podemos mostrar que, em três dimensões,

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{a} + \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) Tr[\mathbb{M}]$$

O lado esquerdo desta equação é

$$\varepsilon^{ijk} \left(a_i b_j c_m + a_m b_i c_j + a_j b_m c_i \right) M_k^m = \varepsilon^{ijk} \left(a_i b_j c_m + a_m b_i c_j - a_i b_m c_j \right) M_k^m$$

Os termos não-nulos desta expressão têm que necessariamente ter $k \neq i \neq j$. Nestes casos (e para três dimensões) quando $m \neq k$, ou se tem $m = i$ ou $m = j$. Nestas condições, para cada k fixo,

$$\varepsilon^{ijk} \left(a_i b_j c_i + a_i b_i c_j - a_i b_j c_j \right) M_k^i + \varepsilon^{ijk} \left(a_i b_j c_j + a_j b_i c_j - a_i b_j c_j \right) M_k^j = \varepsilon^{ijk} \left(a_i b_j c_i M_k^i + a_j b_i c_j M_k^j \right) = 0$$

quando se soma em i, j porque o termo entre parêntesis é simétrico em i, j e o tensor de Levi-Civita é anti-simétrico. Por outro lado, se $m = k$, temos para cada trio $i \neq j \neq k$

$$\varepsilon^{ijk} \left(a_i b_j c_k + a_k b_i c_j + a_j b_k c_i \right) M_k^k = \left(a_i \left(\vec{b} \times \vec{c} \right)^i + a_k \left(\vec{b} \times \vec{c} \right)^k + a_j \left(\vec{b} \times \vec{c} \right)^j \right) M_k^k$$

pelo que somando em k se conclui que

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{a} + \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) Tr[\mathbb{M}]$$

Tendo em conta a expressão (2.9) para a derivada linear de \vec{A} em coordenadas cilíndricas $\{\rho, \varphi, z\}$ obtemos também

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + A_\rho \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Divergência em coordenadas cartesianas

Em coordenadas cartesianas a divergência de um campo de vetores $\vec{A}(\vec{r})$ é uma função escalar

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}_o) = \frac{\partial A_x(\vec{r}_o)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r}_o)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r}_o)}{\partial z}$$

De acordo com o teorema de Gauss, para qualquer campo vetorial $\vec{A}(\vec{r})$ e qualquer volume V com fronteira S_V , tem-se

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) \, dV = \oiint_{S_V} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}$$

Este teorema é consequência de definirmos a divergência de um campo de vetores como

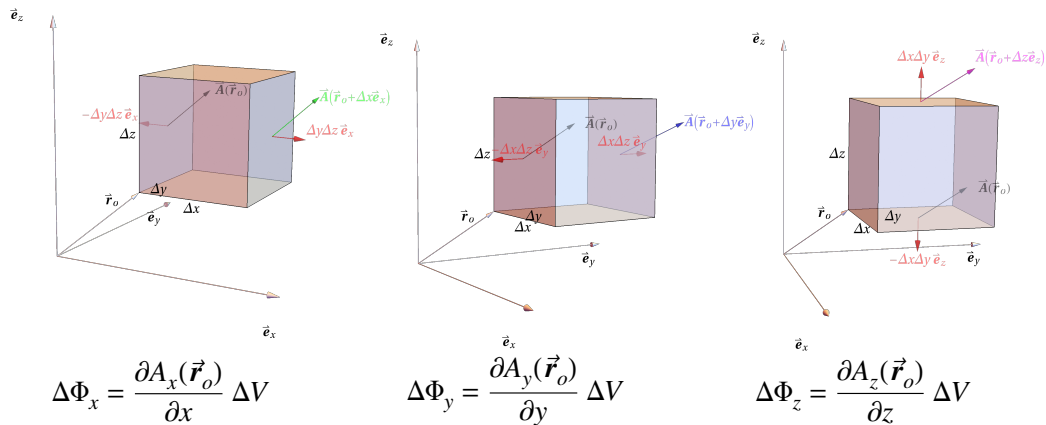
$$\nabla \cdot \vec{A} \equiv \text{div}(\vec{A}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_{S_V} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}(\vec{r}')$$

Em coordenadas cartesianas, um cubo elementar na posição \vec{r}_o tem volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. O fluxo do campo $\vec{A}(\vec{r})$ através das faces do cubo pode ser calculado aproximadamente através da soma de três componentes

$$\begin{cases} \Delta \Phi_x = \vec{A}(\vec{r}_o + \Delta x \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x \Delta y \Delta z - \vec{A}(\vec{r}_o) \cdot \vec{e}_x \Delta y \Delta z & = \frac{\partial A_x(\vec{r}_o)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \\ \Delta \Phi_y = \vec{A}(\vec{r}_o + \Delta y \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_y \Delta x \Delta z - \vec{A}(\vec{r}_o) \cdot \vec{e}_y \Delta x \Delta z & = \frac{\partial A_y(\vec{r}_o)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \\ \Delta \Phi_z = \vec{A}(\vec{r}_o + \Delta z \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z \Delta x \Delta y - \vec{A}(\vec{r}_o) \cdot \vec{e}_z \Delta x \Delta y & = \frac{\partial A_z(\vec{r}_o)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \end{cases}$$

já que

$$\begin{cases} A_x(\vec{r}_o + \Delta x \vec{e}_x) - A_x(\vec{r}_o) = \frac{\partial A_x(\vec{r}_o)}{\partial x} \Delta x \\ A_y(\vec{r}_o + \Delta y \vec{e}_y) - A_y(\vec{r}_o) = \frac{\partial A_y(\vec{r}_o)}{\partial y} \Delta y \\ A_z(\vec{r}_o + \Delta z \vec{e}_z) - A_z(\vec{r}_o) = \frac{\partial A_z(\vec{r}_o)}{\partial z} \Delta z \end{cases}$$



peço que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}_0) \equiv \text{div}(\vec{A})(\vec{r}_0) &= \text{Limit}_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V(\vec{r}_0)} \iint_{\partial V} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}(\vec{r}') = \\ &= \text{Limit}_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_x + \Delta\Phi_y + \Delta\Phi_z}{\Delta V} = \frac{\partial A_x(\vec{r}_0)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r}_0)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r}_0)}{\partial z} \end{aligned}$$

2.8.3.3 Operador Divergência

Em coordenadas cartesianas

$\nabla \cdot \vec{a} = \delta_k^j \frac{\partial a^k}{\partial x^j}$				
$\nabla \cdot (\psi \vec{a}) = \nabla\psi \cdot \vec{a} + \psi \nabla \cdot \vec{a} \quad 8$				
$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) \quad 9$				
$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0 \quad 10$				
$\nabla \cdot \vec{e}_\rho = \frac{1}{\rho}$	$\nabla \cdot \vec{e}_\phi = 0$	$\nabla \cdot \vec{e}_z = 0$	$\nabla \cdot \vec{e}_r = \frac{2}{r}$	$\nabla \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\cot(\theta)}{r}$

8
$$\delta_k^j \frac{\partial(\psi a^k)}{\partial x^j} = \frac{\partial\psi}{\partial x^k} a^k + \psi \delta_k^j \frac{\partial a^k}{\partial x^j}$$

9
$$\delta_k^j \frac{\partial(\epsilon_{rs}^k a^r b^s)}{\partial x^j} = -\epsilon_{.sr}^j b^s \frac{\partial a^r}{\partial x^j} + \epsilon_{.rs}^j a^r \frac{\partial b^s}{\partial x^j} = b^s \delta_{.si}^j (\epsilon_{.r}^{ij} \frac{\partial a^r}{\partial x^j}) - a^r \delta_{.ri}^j (\epsilon_{.s}^{ij} \frac{\partial b^s}{\partial x^j})$$

10
$$\delta_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\epsilon_{.rk}^{ij} \frac{\partial a^k}{\partial x^r} \right) = \epsilon_{.rk}^{ij} \frac{\partial^2 a^k}{\partial x^j \partial x^r} = \frac{1}{2} \epsilon_{.rk}^{ij} \left(\frac{\partial^2 a^k}{\partial x^j \partial x^r} - \frac{\partial^2 a^k}{\partial x^r \partial x^j} \right)$$

2.9 Operadores Diferenciais em Coordenadas Curvilíneas

2.9.1 Sistemas de Coordenadas

2.9.1.1 Coordenadas gerais curvilíneas

Um sistema de coordenadas numa região \mathcal{M} dum espaço de dimensão n é uma correspondência $\eta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que obedece a certas condições (vide o conceito de variedade e cartas locais). Esta correspondência $\Lambda(\mathcal{P}) = \xi_1 \vec{e}_1 + \dots + \xi_n \vec{e}_n$ define naturalmente famílias de n curvas γ_i passando por cada ponto $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ e definidas como a imagem inversa através de Λ^{-1} de linhas coordenadas de \mathbb{R}^n passando por $\Lambda(\mathcal{P})$.

$$\Lambda^{-1}(\Lambda(\mathcal{P}) + s \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n) = \gamma_i(s)_{\mathcal{P}} \in \mathcal{M}$$

Isto significa que $\xi_i \in \mathcal{I}_i \subset \mathbb{R}$ é a i -ésima coordenada generalizada de \mathcal{M} . As curvas $\gamma_i(s)_{\mathcal{P}}$ definem as linhas coordenadas passando por $\mathcal{P} = \gamma_i(0)_{\mathcal{P}}$, i.e. ao longo de $\gamma_i(s)_{\mathcal{P}}$ todas as coordenadas exceto a i -ésima são constantes, $\xi_{j \neq i}(\gamma_i(s)_{\mathcal{P}}) = \xi_j(\mathcal{P})$.

Quando \mathcal{M} é um subconjunto do espaço afim \mathbb{R}^n , e designando por $\vec{t}_k(\mathcal{P}) = \left. \frac{d\gamma_k(s)_{\mathcal{P}}}{ds} \right|_{s=0}$ os vetores tangentes às curvas $\gamma_k(s)_{\mathcal{P}}$ em \mathcal{P} , podemos comparar os vetores tangentes $\vec{t}_i = \frac{d\gamma_i}{ds}$ às curvas $\gamma_i(s)$ em pontos diferentes (caso contrário só se poderá fazê-lo quando uma conexão linear for definida sobre o espaço de referenciais de \mathcal{M}): se estes vetores forem paralelos entre si em todos os pontos de \mathcal{M} para $[i]$ fixo, o sistema de coordenadas é retilíneo, caso contrário é curvilíneo. Se em qualquer ponto $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ se tiver $\vec{t}_i \cdot \vec{t}_j = 0$ para quaisquer $i \neq j$, o sistema de coordenadas diz-se ortogonal e os versores $\vec{e}_{\xi_k}(\mathcal{P}) = \frac{1}{|\vec{t}_k|} \vec{t}_k(\mathcal{P})$ definem uma base ortogonal do referencial móvel $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ associado às coordenadas generalizadas em \mathcal{P} .

2.9.1.2 Deslocamento elementar e funções de escala

Para \mathcal{M} um espaço afim o vetor posição \vec{r} de um ponto $\mathcal{P} = O + \vec{r}$ pode-se escrever também neste referencial associado $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ como $\vec{r}(\mathcal{P}) = x^k(\xi_1(\mathcal{P}), \dots, \xi_n(\mathcal{P})) \vec{e}_{\xi_k}(\mathcal{P})$

Um deslocamento elementar $d\vec{r}(\mathcal{P})$ visto do referencial associado $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ pode-se decompor em termos de deslocamentos elementares nas direções dos versores \vec{e}_{ξ_k} de base e então:

$$d\vec{r} = \Lambda^{-1}(d\vec{\xi}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k} d\xi_k = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k} \right| d\xi_k \vec{e}_{\xi_k} = \eta_k d\xi_k \vec{e}_{\xi_k}$$

onde $\eta_k = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k} \right|$ se designam funções de escala.

2.9.1.3 Elemento de linha infinitesimal

Uma curva $\Gamma \subset \mathcal{M}$ fica definida em termos de um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{r}(\lambda)$. Um elemento de linha pode-se escrever

$$d\vec{r}(\lambda) = \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k} \frac{d\xi_k}{d\lambda} d\lambda = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k} \right| \frac{d\xi_k}{d\lambda} d\lambda \vec{e}_{\xi_k} = \eta_k \frac{d\xi_k}{d\lambda} d\lambda \vec{e}_{\xi_k}$$

2.9.1.4 Elemento de área infinitesimal

Uma superfície $S \subset \mathcal{M}$ fica definida em termos de dois parâmetros $\{u, v\} \in \mathbb{R}^2$, i.e. definindo a dependência explícita $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ dos seus pontos. Um elemento de área de S pode-se então escrever em magnitude dS e direção normal \vec{n} como $d\vec{S} = \vec{n} dS$ onde

$$d\vec{S}(u, v) = du dv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = du dv \frac{1}{2!} \sum_{ij} \eta_i \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial u} \frac{\partial \xi_j}{\partial v} \varepsilon^{ijk} \vec{e}_{\xi_i} \times \vec{e}_{\xi_j}$$

ou seja através do produto vetorial de deslocamentos elementares $d\vec{r}(u) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$ e $d\vec{r}(v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$ ao longo de linhas respetivamente a u -constante e v -constante sobre a superfície. Para $S \subset \mathbb{R}^3$ isto é

$$\begin{aligned} d\vec{S}(u, v) = & du dv \left(\eta_1 \eta_2 \vec{e}_{\xi_1} \times \vec{e}_{\xi_2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u} \frac{\partial \xi_2}{\partial v} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right) + \right. \\ & + \eta_2 \eta_3 \vec{e}_{\xi_2} \times \vec{e}_{\xi_3} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} - \frac{\partial \xi_3}{\partial u} \frac{\partial \xi_2}{\partial v} \right) + \\ & \left. + \eta_3 \eta_1 \vec{e}_{\xi_3} \times \vec{e}_{\xi_1} \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} \right) \right) \quad (2.14) \end{aligned}$$

2.9.1.5 ELEMENTO DE VOLUME INFINITESIMAL

Um elemento de volume $dV_{\mathcal{P}}$ fica analogamente definido em coordenadas curvilíneas como o produto vetorial de deslocamentos elementares ao longo das suas n curvas coordenadas $\gamma_i(s)_{\mathcal{P}}$ a partir do ponto \mathcal{P} .

$$dV(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \times \dots \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_n} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \eta_1(\vec{r}) \eta_2(\vec{r}) \dots \eta_n(\vec{r}) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$$

2.9.1.6 GRADIENTE:

A partir da relação diferencial $df(\vec{r}) = \nabla f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ obtém-se por substituição das respetivas expressões em coordenadas curvilíneas para df e $d\vec{r}$

$$\nabla f(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_k} \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \vec{e}_{\xi_k}$$

2.9.1.7 DIVERGÊNCIA:

A partir da identidade integral $\oiint_{\partial V} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) dV$ e no limite infinitesimal $V \rightarrow dV = \eta_1 \eta_2 \eta_3 dx^1 dx^2 dx^3$ (e portanto $\partial V \rightarrow \partial dV$) deduz-se a expressão

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow dV} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

O fluxo de $\vec{A}(\vec{r})$ através da fronteira do volume elementar $dV(\vec{r})$ envolve a diferença dos fluxos através de faces elementares paralelas e opostas separadas de $\eta_i d\xi_i$. Numa situação geral, se $d\vec{S}(\vec{r})$ e $d\vec{S}(\vec{r} + d\vec{r})$ representarem elementos de superfície paralelas, separadas por $d\vec{r}$ e orientadas no mesmo sentido, e se pusermos $d\vec{S}(\vec{r})_+ = -d\vec{S}(\vec{r})$ e $d\vec{S}(\vec{r} + d\vec{r})_+ = d\vec{S}(\vec{r} + d\vec{r})$ para as faces orientadas em sentido opostos, teremos que o fluxo de $\vec{A}(\vec{r})$ através destas duas faces assim orientadas é

$$\begin{aligned} & \vec{A}(\vec{r} + d\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r} + d\vec{r})_+ + \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})_+ = \\ & = \vec{A}(\vec{r} + d\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r}) \cong d\vec{r} \cdot \nabla (\vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})) \end{aligned}$$

No caso de um volume elementar $dV(\vec{r})$ as suas faces são paralelas ou anti-paralelas a elementos de área

$$d\vec{S}(\xi_r, \xi_s) = \frac{1}{2!} d\xi_r d\xi_s \sum_{ij} \eta_i \eta_j \delta_i^r \delta_j^s \varepsilon^{ijk} \vec{e}_{\xi_i} \times \vec{e}_{\xi_j} = \eta_r \eta_s d\xi_r d\xi_s \varepsilon^{rsk} \vec{e}_{\xi_r} \times \vec{e}_{\xi_s}$$

pelo que

$$\oiint_{\partial V} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r}) = \sum_k d\xi_k d\xi_r d\xi_s \frac{\partial (\eta_r \eta_s A_k)}{\partial \xi_k}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \left(\frac{\partial(\eta_2 \eta_3 A_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\eta_1 \eta_3 A_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial(\eta_1 \eta_2 A_3)}{\partial \xi_3} \right) = \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \varepsilon^{kji} \frac{\partial(\eta_j \eta_i A_k)}{\partial \xi_k} (\vec{e}_{\xi_k} \times \vec{e}_{\xi_j} \times \vec{e}_{\xi_i})^* \quad 11\end{aligned}$$

Combinando a divergência e o gradiente podemos escrever o Laplaciano como

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\eta_2 \eta_3}{\eta_1} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2} \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_3} \frac{\partial f}{\partial \xi_3} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \frac{1}{\eta_i \eta_j \eta_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\eta_j \eta_i}{\eta_k} \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \right)\end{aligned}$$

2.9.1.8 ROTACIONAL:

A partir da identidade integral $\oint_{\partial S} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$ e no limite $S \rightarrow dS$ ($\partial S \rightarrow \mathcal{P}$) deduz-se que

$$\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}(\vec{r})) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\partial S} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$$

onde $d\vec{S} = \vec{n} dS$. Como se pode sempre decompor uma circulação num circuito arbitrário em termos de circuitos retangulares, se $d\vec{\ell}(\vec{r})$ e $d\vec{\ell}(\vec{r} + d\vec{r})$ representarem elementos de linha paralelos e separados por $d\vec{r}$, a circulação de \vec{A} em sentidos opostos nestes elementos soma

$$\vec{A}(\vec{r} + d\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}(\vec{r}) \cong d\vec{r} \cdot \nabla (\vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}(\vec{r}))$$

Fazendo $\vec{n} = \vec{e}_{\xi_j} = \varepsilon^{ikj} \vec{e}_{\xi_i} \times \vec{e}_{\xi_k}$ e $d\vec{\ell} = \eta_i d\ell_i \vec{e}_{\xi_i}$ ou $d\vec{\ell} = \eta_k d\ell_k \vec{e}_{\xi_k}$ os lados da superfície elementar que lhe corresponde, teremos em consequência

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) &= \sum_{ikj} \frac{\varepsilon^{ikj}}{\eta_i \eta_k} \frac{\partial(\eta_k A_k)}{\partial \xi_i} \vec{e}_{\xi_j} = \\ &= \frac{1}{\eta_2 \eta_3} \left(\frac{\partial(\eta_3 A_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial(\eta_2 A_2)}{\partial \xi_3} \right) \vec{e}_{\xi_1} + \\ &\quad + \frac{1}{\eta_1 \eta_3} \left(\frac{\partial(\eta_1 A_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial(\eta_3 A_3)}{\partial \xi_1} \right) \vec{e}_{\xi_2} + \\ &\quad + \frac{1}{\eta_1 \eta_2} \left(\frac{\partial(\eta_1 A_1)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial(\eta_2 A_2)}{\partial \xi_1} \right) \vec{e}_{\xi_3}\end{aligned}$$

Em 3 dimensões é possível escrever simbolicamente esta operação como

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \det \begin{pmatrix} \eta_1 \vec{e}_{\xi_1} & \eta_2 \vec{e}_{\xi_2} & \eta_3 \vec{e}_{\xi_3} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ \eta_1 A_1 & \eta_2 A_2 & \eta_3 A_3 \end{pmatrix}$$

¹¹ Note-se que aqui $\varepsilon_{kji} = \text{sign}(\sigma(kji))$, o sinal da permutação de 3 símbolos, e $(\vec{e}_{\xi_k} \times \vec{e}_{\xi_j} \times \vec{e}_{\xi_i})^*$ é um *pseudo-escalar* dado pelo dual \star de Hodge da *3-forma* produto tensorial anti-simétrico das bases \vec{e}_{ξ_n} .

Definição: Laplaciano em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Sendo a divergência dum campo \vec{A} em geral

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{3!} \sum_{i \neq j \neq k} \frac{1}{\eta_i \eta_j \eta_k} \frac{\partial(\eta_i \eta_j A_k)}{\partial x^k} = \frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \left(\frac{\partial(\eta_2 \eta_3 A_1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\eta_1 \eta_3 A_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\eta_1 \eta_2 A_3)}{\partial x^3} \right)$$

e o gradiente duma função escalar f um vetor

$$\nabla f = \sum_k \frac{1}{\eta_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \vec{e}_k = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{1}{\eta_3} \frac{\partial f}{\partial x^3}$$

então a definição de Laplaciano é $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{3!} \sum_{i \neq j \neq k} \frac{1}{\eta_i \eta_j \eta_k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\eta_i \eta_j}{\eta_k} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\eta_2 \eta_3}{\eta_1} \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2} \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_3} \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \right)$$

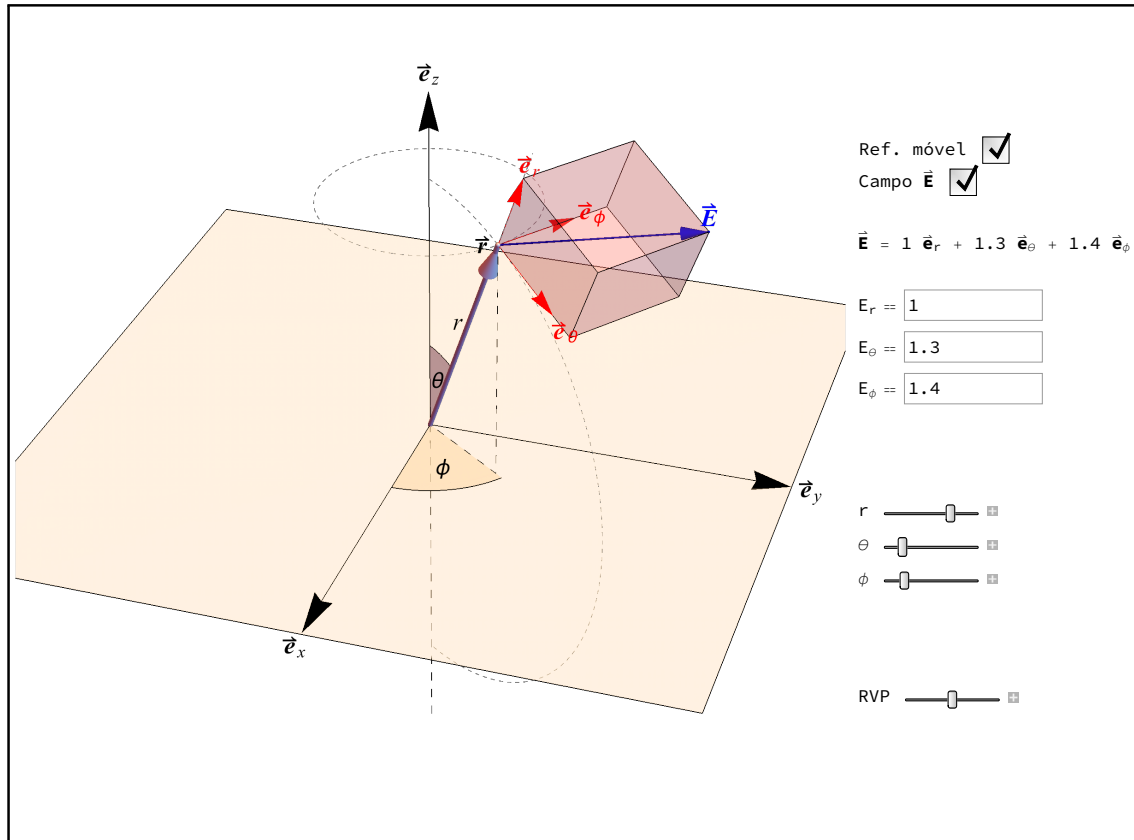
2.9.2 Coordenadas Esféricas $\xi_k \in \{r, \theta, \phi\}$ Coordenadas Esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ 

Figura 2.14: Em coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ um ponto do espaço é determinado pela distância r à origem do sistema de referência, o ângulo θ entre o eixo vertical \vec{e}_z e a linha de observação do ponto a partir da origem, e o ângulo ϕ entre o plano vertical xOz e o plano vertical passando pelo ponto e o eixo \vec{e}_z . Neste sistema de coordenadas, o vetor posição dum ponto é $\vec{r} = r \vec{e}_r$, no respetivo referencial móvel esférico $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ associado a este ponto. Qualquer vetor \vec{E} associado a \vec{r} (por exemplo a velocidade, a aceleração ou um campo de força nesse ponto) se pode decompor em componentes $\{E_r, E_\theta, E_\phi\}$ no referencial móvel em \vec{r} .

Um sistema de coordenadas ortogonais curvilíneas **Esféricas** consiste na definição de três parâmetros $\{r, \theta, \phi\}$ únicos para cada ponto $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, ou seja duma correspondência bijectiva $\vec{r} = \Lambda^{-1}(r, \theta, \phi)$ (de facto será necessário definir várias e por partes i.e. um Atlas) com $r \in]0, +\infty[$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi[$, de tal maneira que as curvas obtidas pela fixação de qualquer **par de parâmetros**,

- $u(r) = \Lambda^{-1}(r, \theta_o, \phi_o)$ (semirreta passando pela origem com azimute ϕ_o e inclinação θ_o)
- $v(\theta) = \Lambda^{-1}(r_o, \theta, \phi_o)$ (semicírculo vertical com centro na origem, de raio r_o e azimute ϕ_o)
- $w(\phi) = \Lambda^{-1}(r_o, \theta_o, \phi)$ (círculo horizontal de raio $\rho = r_o \sin(\theta_o)$ centrado no eixo dos z à altura $z_o = r_o \cos(\theta_o)$)

passem por $\vec{r}_o = \Lambda^{-1}(r_o, \theta_o, \phi_o) = u(r_o) = v(\theta_o) = w(\phi_o)$ e sejam **ortogonais entre si**, qualquer que seja o ponto \vec{r}_o escolhido.

O triedro de vetores de módulo unitário $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ que representam no ponto \vec{r}_o as direções tangentes a cada uma das curvas $u(r)$, $v(\theta)$, $w(\phi)$ designamos por **referencial móvel** associado ao sistema de coordenadas curvilíneas indicado.

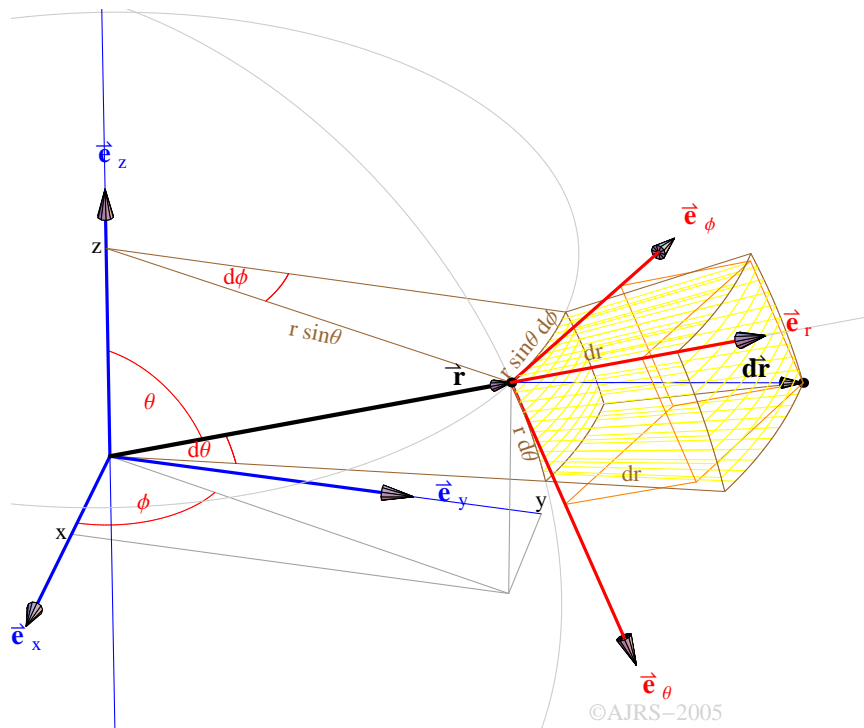


Figura 2.15: Parâmetros $\{r, \theta, \phi\}$ e Elementos Infinitesimais em Coordenadas Esféricas.

2.9.2.1 Vetor Posição no referencial associado:

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

2.9.2.2 Relação com coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} r \in [0, \infty[\\ \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases} \xRightarrow{\Lambda^{-1}} \begin{cases} x = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\vec{r} = r (\sin(\theta) (\cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y) + \cos(\theta) \vec{e}_z)$$

2.9.2.3 Versores do referencial associado:

$$\begin{cases} \vec{e}_r(\theta, \varphi) = \sin(\theta) (\cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y) + \cos(\theta) \vec{e}_z = \sin(\theta) \vec{e}_\rho(\varphi) + \cos(\theta) \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta(\theta, \varphi) = \cos(\theta) (\cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y) - \sin(\theta) \vec{e}_z = \cos(\theta) \vec{e}_\rho(\varphi) - \sin(\theta) \vec{e}_z \end{cases}$$

onde

$$\vec{e}_\rho(\varphi) = -\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y$$

2.9.2.4 FUNÇÕES DE ESCALA:

$$\eta_k = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k} \right| \quad : \quad \begin{cases} \eta_1 = 1 \\ \eta_2 = r \\ \eta_3 = r \sin(\theta) \end{cases}$$

2.9.2.5 ELEMENTO DE LINHA:

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi$$

Note que em geral

$$d\vec{r} = \vec{r}(r + \delta r, \theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi) - \vec{r}(r, \theta, \varphi) \neq \delta r \vec{e}_r + r \delta\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) \delta\varphi \vec{e}_\varphi$$

Apenas no limite $\delta r \rightarrow dr$, $\delta\theta \rightarrow d\theta$, $\delta\varphi \rightarrow d\varphi$ as duas expressões coincidem.

2.9.2.6 ELEMENTO DE ÁREA INFINITESIMAL:

$$\begin{aligned} d\vec{S}(u, v) = & du dv \left(\eta_1 \eta_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u} \frac{\partial \xi_2}{\partial v} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right) \right. \\ & + \eta_2 \eta_3 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} - \frac{\partial \xi_3}{\partial u} \frac{\partial \xi_2}{\partial v} \right) \\ & \left. + \eta_3 \eta_1 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} \right) \right) \end{aligned} \quad 12$$

$$\begin{cases} d\vec{S}(\theta, \varphi) = (\eta_\theta d\theta \vec{e}_\theta) \times (\eta_\varphi d\varphi \vec{e}_\varphi) = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_r \\ d\vec{S}(r, \theta) = (\eta_r dr \vec{e}_r) \times (\eta_\theta d\theta \vec{e}_\theta) = r dr d\theta \vec{e}_\varphi \\ d\vec{S}(\varphi, r) = (\eta_\varphi d\varphi \vec{e}_\varphi) \times (\eta_r dr \vec{e}_r) = r \sin(\theta) d\varphi dr \vec{e}_\theta \end{cases}$$

2.9.2.7 ELEMENTO DE VOLUME INFINITESIMAL:

$$dV(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

O segmento de volume esférico $\Delta V(\vec{r})$ compreendido entre os raios $r, r + \delta r$, as inclinações $\theta, \theta + \delta\theta$ e os azimutes $\varphi, \varphi + \delta\varphi$ mede

$$\Delta V(\vec{r}) = \int_{\theta}^{\theta + \delta\theta} \left(\int_{\varphi}^{\varphi + \delta\varphi} \left(\int_r^{r + \delta r} r^2 \sin(\theta) dr \right) d\varphi \right) d\theta = \frac{1}{3} ((r + \delta r)^3 - r^3) (\cos(\theta) - \cos(\delta\theta + \theta)) \delta\varphi$$

No limite infinitesimalmente pequeno $\Delta V(\vec{r})$ pode mostrar-se equivalente ao volume paralelepípedo definido por $d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi$ no referencial móvel associado. Expandindo $\cos(\theta + \delta\theta) \simeq \cos(\theta) - \sin(\theta) \delta\theta + O(\delta\theta^2)$ verifica-se

$$dV(\vec{r}) \simeq r^2 \sin(\theta) \delta r \delta\theta \delta\varphi + \frac{1}{2} r^2 \cos(\theta) \delta r \delta\theta^2 \delta\varphi + r \sin(\theta) \delta r^2 \delta\theta \delta\varphi + O(\delta^5)$$

Quando $\delta r \rightarrow dr$, $\delta\theta \rightarrow d\theta$, $\delta\varphi \rightarrow d\varphi$ retemos apenas o termo de mais baixa ordem em produtos de infinitésimos, i.e. $r^2 \sin(\theta) \delta r \delta\theta \delta\varphi$.

12

$$\begin{cases} d\vec{S}(\theta, \varphi) = d\theta d\varphi \left(r^2 \sin(\theta) \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) + r \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) + r \sin(\theta) \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) \right) \\ d\vec{S}(r, \theta) = dr d\theta \left(r^2 \sin(\theta) \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) + r \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta \left(\frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) + r \sin(\theta) \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) \right) \\ d\vec{S}(\varphi, r) = d\varphi dr \left(r^2 \sin(\theta) \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + r \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial r} \right) + r \sin(\theta) \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial r} \right) \right) \end{cases}$$

2.9.2.8 GRADIENTE:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

2.9.2.9 DIVERGÊNCIA:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(\sin(\theta) A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

2.9.2.10 ROTACIONAL:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial(\sin(\theta) A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin(\theta) A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

2.9.2.11 Laplaciano:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right)$$

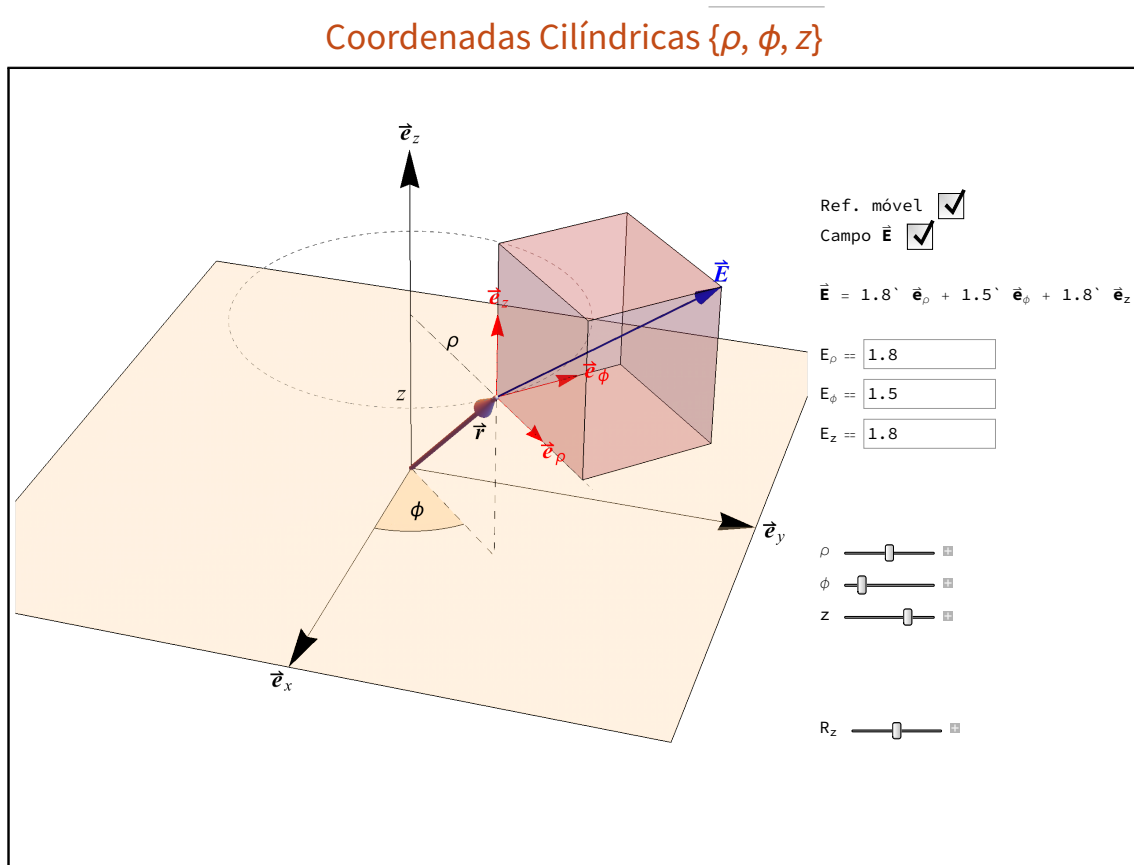
2.9.3 Coordenadas Cilíndricas $\xi_k \in \{\rho, \phi, z\}$ 

Figura 2.16: Em coordenadas cilíndricas um ponto do espaço é representado por coordenadas $\{\rho, \phi, z\}$, onde ρ é a distância ao eixo \vec{e}_z , ϕ o ângulo que o plano vertical passando pelo ponto e o eixo \vec{e}_z faz com o plano vertical xOz , e z a altura do ponto relativamente ao plano horizontal xOy . Neste sistema de coordenadas, o vetor posição dum ponto é $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$ no respetivo referencial móvel cilíndrico $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z\}$ associado a esse ponto. Qualquer vetor \vec{E} associado a \vec{r} (por exemplo a velocidade, a aceleração ou um campo de força nesse ponto) se pode decompor em componentes $\{E_\rho, E_\phi, E_z\}$ no referencial móvel em \vec{r} .

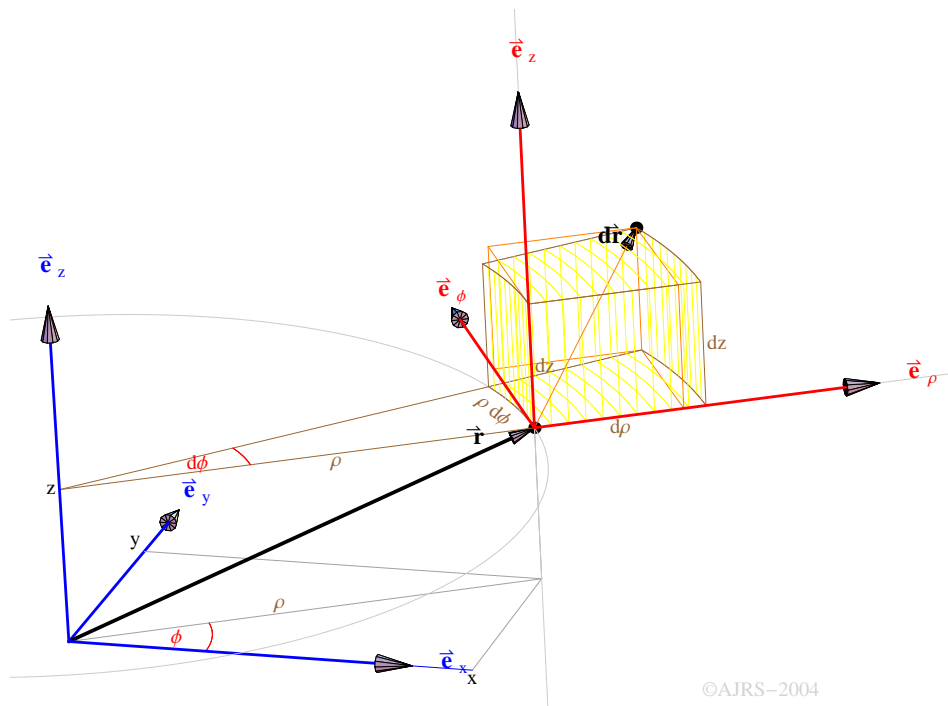
Um sistema de coordenadas ortogonais curvilíneas **Cilíndricas** consiste na definição de três parâmetros $\{\rho, \phi, z\}$ únicos para cada ponto $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ ou seja duma correspondência bijetiva $\vec{r} = f(\rho, \phi, z)$ (de facto será necessário definir várias e por partes i.e. um Atlas) com $\rho \in]0, +\infty[$, $\phi \in [0, 2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$, de tal maneira que as curvas obtidas pela fixação de qualquer **par de parâmetros**, $u(\rho) = f(\rho, \phi_o, z_o)$, $v(\phi) = f(\rho_o, \phi, z_o)$, $w(z) = f(\rho_o, \phi_o, z)$ passem por

$$\vec{r}_o = f(\rho_o, \phi_o, z_o) = u(\rho_o) = v(\phi_o) = w(z_o)$$

e sejam **ortogonais entre si**, qualquer que seja o ponto \vec{r}_o escolhido.

Designamos por **referencial móvel** associado ao sistema de coordenadas curvilíneas indicado o triedro de vetores de módulo unitário \vec{e}_ρ , \vec{e}_ϕ , \vec{e}_z no ponto \vec{r}_o que representam as direções tangentes a cada uma das curvas

- $u(\rho)$ (semirretas horizontais passando pelo eixo dos z)
- $v(\phi)$ (círculos horizontais concêntricos com o eixo dos z)
- $w(z)$ (retas verticais)



— VETOR POSIÇÃO NO REFERENCIAL ASSOCIADO:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

— RELAÇÃO COM COORDENADAS CARTESIANAS:

$$\vec{r} = \rho (\cos(\phi) \vec{e}_x + \sin(\phi) \vec{e}_y) + z \vec{e}_z \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \rho \in [0, \infty[\\ \xi_2 = \phi \in [0, 2\pi[\\ \xi_3 = z \in]-\infty, \infty[\end{cases} \xRightarrow{\Lambda^{-1}} \begin{cases} x = \rho \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\phi) \\ z = z \end{cases}$$

— VERSORES DO REFERENCIAL ASSOCIADO:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho(\phi) = \cos(\phi) \vec{e}_x + \sin(\phi) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi(\phi) = -\sin(\phi) \vec{e}_x + \cos(\phi) \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

— FUNÇÕES DE ESCALA:

$$\eta_k = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k} \right| = \begin{cases} \eta_1 = 1 \\ \eta_2 = \rho \\ \eta_3 = 1 \end{cases}$$

— ELEMENTO DE LINHA:

$$d\vec{r} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\phi \vec{e}_\phi + dz \vec{e}_z \quad (2.16)$$

— ELEMENTO DE ÁREA INFINITESIMAL:

$$d\vec{S}(u, v) = dudv \left(\eta_1 \eta_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u} \frac{\partial \xi_2}{\partial v} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right) + \right. \\ \left. + \eta_2 \eta_3 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} - \frac{\partial \xi_3}{\partial u} \frac{\partial \xi_2}{\partial v} \right) + \right. \\ \left. + \eta_3 \eta_1 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} \right) \right) \quad 13$$

— ÁREAS COORDENADAS ELEMENTARES:

$$\begin{cases} d\vec{S}(\phi, z) = (\eta_\phi d\phi \vec{e}_\phi) \times (\eta_z dz \vec{e}_z) = \rho d\phi dz \vec{e}_\rho \\ d\vec{S}(\rho, \phi) = (\eta_\rho d\rho \vec{e}_\rho) \times (\eta_\phi d\phi \vec{e}_\phi) = \rho d\rho d\phi \vec{e}_z \\ d\vec{S}(z, \rho) = (\eta_z dz \vec{e}_z) \times (\eta_\rho d\rho \vec{e}_\rho) = dz d\rho \vec{e}_\theta \end{cases}$$

— ELEMENTO DE VOLUME INFINITESIMAL:

$$dV(r, \theta, \varphi) = \rho d\rho d\phi dz$$

— GRADIENTE:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

— DIVERGENCIA:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z} \right) = \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

— ROTACIONAL:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z$$

— LAPLACIANO:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2.10 Exercícios

Exercício 2.1

Determine o ângulo θ_{AB} entre os seguintes vetores:

$$\vec{A} = \vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 3\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{B} = 4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 4\vec{e}_z$$

13

$$\begin{cases} d\vec{S}(\phi, z) = d\phi dz \left(\rho \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho \left(\frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial z} \right) \right) = \rho d\phi dz \vec{e}_\rho \\ d\vec{S}(\rho, \phi) = d\rho d\phi \left(\rho \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} - \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right) + \rho \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \phi} - \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right) + \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} - \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \phi} \right) \right) = \rho d\rho d\phi \vec{e}_z \\ d\vec{S}(z, \rho) = dz d\rho \left(\rho \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) + \rho \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) + \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho \left(\frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \right) = dz d\rho \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Resposta 2.1

Usando o produto escalar determina-se que $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\theta_{AB})$.

Por outro lado $\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \cdot (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 4\vec{e}_z)$ e como $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ij}$ i.e. 0 se $i \neq k$ e 1 se $i = k$, resulta da linearidade do produto escalar que

$$(\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \cdot (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) = 4\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + 8\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y - 12\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 0$$

Consequentemente o ângulo θ_{AB} deve verificar $\cos(\theta_{AB}) = 0$ (porque as magnitudes A e B só podem anular-se se o respetivo vetor for nulo), ou seja $\theta_{AB} = \pm \frac{\pi}{2}$, i.e. os vetores são perpendiculares. Reciprocamente, quaisquer vetores perpendiculares têm sempre um produto escalar nulo.

Exercício 2.2

A Lei dos Cosenos é a generalização do Teorema de Pitágoras para triângulos arbitrários não-rectângulos. Use uma representação vectorial para um triângulo identificando os lados a, b, c com vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ por forma que $\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$. Designando o quadrado de um vetor por $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$ deduza esta lei dos cosenos usando cada um dos lados para o papel de 'hipotenusa'.

Resposta 2.2

A partir de $\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$ e quadrando ambos os lados obtém-se

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{B} - \vec{C})^2 = \vec{B} \cdot \vec{B} + \vec{C} \cdot \vec{C} - 2\vec{B} \cdot \vec{C}$$

ou seja $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos(\theta_{BC})$ onde $\theta_{BC} = \theta_a$ representa o ângulo interno do triângulo oposto ao lado a (representado pelo vetor \vec{A}). Usando os mesmos vetores podem-se deduzir relações análogas a partir das identidades $\vec{B} = \vec{A} - (-\vec{C}) = \vec{A} - \vec{C}'$ com o ângulo interno $\theta_b = \theta_{AC'}$ oposto a b , e $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$ com $\theta_c = \theta_{BA}$ oposto a c . Notando que $C' = |\vec{C}'| = |-\vec{C}| = C$ obtém-se

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos(\theta_a)$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos(\theta_b)$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\theta_c)$$

Exercício 2.3

Use a definição de produto vetorial (e a propriedade dos ângulos inscritos num círculo segundo a qual a sua medida é sempre igual a metade do arco de círculo que sub-tende) para demonstrar a Lei dos Senos para um triângulo $\overline{\mathcal{ABC}}$, de lados $\vec{A} = \mathcal{B} - \mathcal{C}$, $\vec{B} = \mathcal{C} - \mathcal{A}$ e $\vec{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$,

$$\frac{A}{\sin(\theta_a)} = \frac{B}{\sin(\theta_b)} = \frac{C}{\sin(\theta_c)} = 2R$$

e determinar o raio R do círculo que circunscreve o triângulo.

Resposta 2.3

Da relação vetorial $\vec{A} = -\vec{B} - \vec{C}$ obtém-se por produto vetorial com \vec{B} e \vec{C} :

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin(\theta_c) = |-(\vec{B} + \vec{C}) \times \vec{B}| = |-\vec{C} \times \vec{B}| = BC \sin(\theta_a) \implies \frac{A}{\sin(\theta_a)} = \frac{C}{\sin(\theta_c)}$$

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = AC \sin(\theta_b) = |-(\vec{B} + \vec{C}) \times \vec{C}| = |-\vec{B} \times \vec{C}| = BC \sin(\theta_a) \implies \frac{A}{\sin(\theta_a)} = \frac{B}{\sin(\theta_b)}$$

donde resulta imediatamente a chamada **Lei dos Senos**

$$\frac{A}{\sin(\theta_a)} = \frac{B}{\sin(\theta_b)} = \frac{C}{\sin(\theta_c)}$$

onde θ_a representa o ângulo no vértice do triângulo oposto ao lado A , e de forma idêntica para os outros. Finalmente, se fixarmos o lado b (descrito por \vec{B}) e deslocarmos o vértice oposto B sobre o círculo que circunscreve o triângulo, adjacente a este ângulo, passa pelo centro do círculo, portanto $A' = 2R$, sendo que $B' = B$ e $\theta_{b'} = \theta_b = \alpha - \beta$. Nesta posição o ângulo oposto a a' no triângulo $CA'B'$ deve ser reto, i.e. $\sin(\theta_{a'}) = 1$, pelo que de acordo com a Lei dos Senos para este triângulo nessa posição,

$$\frac{A}{\sin(\theta_a)} = \frac{B}{\sin(\theta_b)} = \frac{B'}{\sin(\theta_{b'})} = \frac{A'}{\sin(\theta_{a'})} = 2R$$

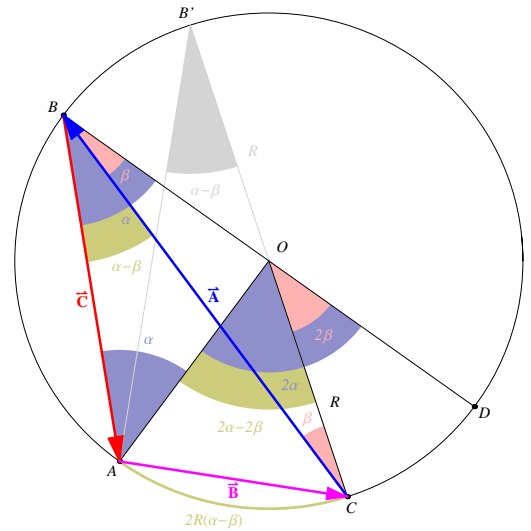


Figura 2.17: O ângulo que subtende um arco de círculo é invariante quando se desloca o seu vértice mantendo-o dum mesmo lado da corda e é igual a $\frac{1}{2R}$ do arco subtendido.

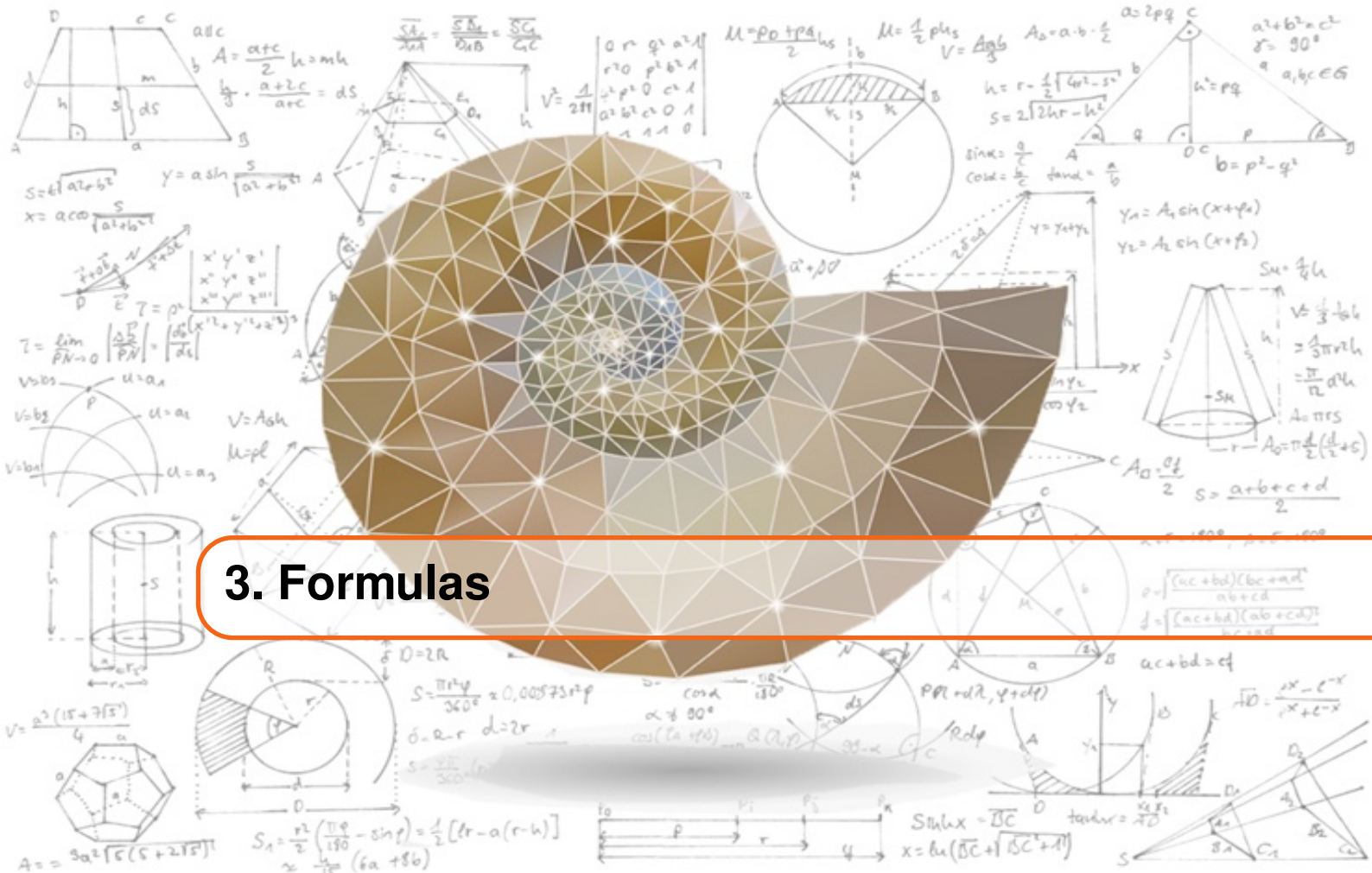
Exercício 2.4

Se \vec{A} for um vetor constante, que figura geométrica definem os pontos do espaço afim $\{O, \mathbb{R}^3\}$, com origem O , representados por $\mathcal{P} = O + \vec{r}$ quando \vec{r} obedece a uma das seguintes equações:

a) $\vec{A} \cdot (\vec{r} - \vec{A}) = 0$ b) $\vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{A}) = 0$

Resposta 2.4

- a) Um plano $\Pi_{\mathcal{A}}$ passando por $\mathcal{A} = O + \vec{A}$ e perpendicular a \vec{A} .
- b) Uma superfície esférica S_C passando pela origem, de diâmetro $A = |\vec{A}|$ e centro $C = O + \frac{1}{2}\vec{A}$.



3. Formulas

Conteúdo

3.1	Identidades Matemáticas	69
3.1.1	Identidades Diferenciais	69
3.1.2	Identidades Algébricas	70
3.1.3	Identidades Integrais	70
3.1.4	Teorema de Helmholtz	70

3.1 Identidades Matemáticas

3.1.1 Identidades Diferenciais

$\nabla(\psi \varphi) = \psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi$	$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a})$
$\nabla \cdot (\psi \vec{a}) = \nabla \psi \cdot \vec{a} + \psi \nabla \cdot \vec{a}$	$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$
$\nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi$	$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$
$\nabla \times (\psi \vec{a}) = (\nabla \psi) \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}$	$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b}$
$\nabla \times (\nabla \psi) = 0$	$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$

3.1.2 Identidades Algébricas

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \qquad [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \qquad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d} \qquad [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d} = [\vec{d}\vec{b}\vec{c}]\vec{a} + [\vec{d}\vec{c}\vec{a}]\vec{b} + [\vec{d}\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$$

3.1.3 Identidades Integrais

$$\oiint_{\partial V} \psi \, d\vec{S} = \iiint_V \nabla \psi \, dV$$

$$\oint_{\partial S} \psi \, d\vec{\ell} = - \iint_S \nabla \psi \times d\vec{S}$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{a} \, dV$$

$$\oint_{\partial S} \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \times \vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{a} \times d\vec{S} = - \iiint_V \nabla \times \vec{a} \, dV$$

$$\oint_{\partial S} \vec{a} \times d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \cdot \vec{a}) d\vec{S} - \iint_S \nabla (\vec{a} \cdot d\vec{S})$$

3.1.4 Teorema de Helmholtz

Um campo vetorial \vec{a} cuja divergência $\nabla \cdot \vec{a}$ e rotacional $\nabla \times \vec{a}$ sejam bem definidos em todo o espaço, e seja regular no infinito (i.e. que seja $o(r^{-2})$ para grandes distâncias r) fica unicamente determinado pela sobreposição de um campo Irrotacional $-\nabla\phi$ e um campo Solenoidal $\nabla \times \vec{A}$

$$\vec{a}(\vec{r}) = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

$$\phi(\vec{r}) = \phi_o + \iiint \frac{\nabla' \cdot \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = - \iiint \frac{\nabla' (\nabla' \cdot \vec{a}) - \nabla' \times (\nabla' \times \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_o + \iiint \frac{\nabla' \times \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

DESIGNAÇÃO	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	DIMENSÕES	UNIDADE	UNIDADES SI
Campo Elétrico	\vec{E}	$\frac{\text{Força}}{\text{Carga}}$	$\frac{\text{Volt}}{\text{Metro}}$	$\frac{V}{m}$	$\frac{N}{As}$
$\vec{F}_e = q \vec{E}(\vec{r}_q)$		$dq(\vec{r}_q) = \lambda(\vec{r}_q) d\ell = \sigma(\vec{r}_q) dS = \rho(\vec{r}_q) dV$			
$d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}_q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla r^{-1}(\vec{r}_q) dq(\vec{r}_q)$ ^a		$\vec{E}(\vec{r}) = \int_q d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}_q) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int r^{-1}(\vec{r}_q) dq(\vec{r}_q) + \varphi_o \right)$			
Potencial Eletrostático	φ	$\frac{\text{Energia}}{\text{Carga}}$	Volt	V	$\frac{J}{As}$
$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int r^{-1}(\vec{r}_q) dq(\vec{r}_q) + c^{te}$		$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \implies V(\vec{r}) = -\Delta\varphi = -\int_{\vec{r}_o, \vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ^b			
LEI DE GAUSS ELETROSTÁTICA					
$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \frac{(Q_c + Q_p)_{int}}{\epsilon_0}$			$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (Q_c)_{int}$		
Polarização	\vec{P}	$\frac{\text{Momento Dipolar}}{\text{Volume}}$	$\frac{\text{Carga} \times \text{Metro}}{\text{Metro}^3}$	$\frac{C}{m^2}$	$\frac{As}{m^2}$
Deslocamento Elétrico	\vec{D}	$\frac{\text{Carga}}{\text{Area}}$	$\frac{\text{Coulomb}}{\text{Metro}^2}$	$\frac{C}{m^2}$	$\frac{As}{m^2}$
$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$		$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \implies \vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (meio LHI) $\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \implies \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$			
$-\nabla \cdot \vec{P} = \rho_p$; $\vec{P} \cdot \vec{n}_{ext} = \sigma_p$		$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$; $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_c$			
Capacidade	C	$\frac{\text{Carga}}{\text{Tensão}}$	Farad	F	$\frac{(As)^2}{J}$
Permitividade Elétrica	ϵ	$\frac{\text{Capacidade}}{\text{Comprimento}}$	$\frac{\text{Farad}}{\text{Metro}}$	$\frac{F}{m}$	$\frac{(As)^2}{Jm}$
$C = \frac{Q}{V}$		$U_c = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$			
LEI DE JOULE E CIRCUITOS ELÉTRICOS					
Corrente Elétrica	I	$\frac{\text{Carga}}{\text{Tempo}}$	$\frac{\text{Coulomb}}{\text{Segundo}}$	A	A
Densidade de Corrente Elétrica	\vec{J}	$\frac{\text{Corrente}}{\text{Area}}$	$\frac{\text{Ampere}}{\text{Metro}^2}$	$\frac{A}{m^2}$	$\frac{A}{m^2}$
Condutividade Elétrica	σ_e	$\frac{\text{Dens. Corrente}}{\text{Campo Elétrico}}$	$\frac{\text{Ampere}}{\text{Volt} \times \text{Metro}}$	$\frac{A}{Vm}$	$\frac{S}{m}$
$I = \frac{dQ_S}{dt} \equiv \iint_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})$		$\vec{J}(\vec{r}) = \sigma_e(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \implies V = RI$			
$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ_{int}}{dt} \iff \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$		$R = \int \frac{d\ell}{\sigma_e(\ell) S(\ell)}$			
$\sum_{i \in \text{nó}} I_i = 0$		$\sum_{k \in \text{malha}} \mathcal{E}_k = \sum_{i \in \text{malha}} R_i I_i + \sum_{j \in \text{malha}} \frac{Q_j}{C_j}$			
ENERGIA ELÉTRICA, CONDIÇÕES FRONTEIRA E PRESSÃO ELÉTRICA p_e					
$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \equiv \iiint_V \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV$		$(dW_c)_Q = -\frac{1}{2} Q dV$; $(dW_c)_V = +\frac{1}{2} V dQ$			
$D_2^\perp - D_1^\perp = \sigma_c$; $E_2^\parallel - E_1^\parallel = 0$		$p_e = \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \left(E_\parallel^2 + \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} D_\perp^2 \right)$			

^a $r^{-1}(\vec{r}_q) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} \implies \nabla r^{-1}(\vec{r}_q) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$

^b $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ com o campo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$. (Campos variáveis no tempo.)

DESIGNAÇÃO	NOTAÇÃO	SIGNIFICADO	DIMENSÕES	UNIDADE	UNIDADES SI
Densidade de Fluxo Magnético	$\vec{B} = \int d\vec{B}$	$\frac{\text{Força}}{\text{Carga} \times \text{Veloc.}}$	Tesla	T	$\frac{N}{Am}$
$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \times \nabla r^{-1}(\vec{\ell})^a$			$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}_0) \times \nabla r^{-1}(\vec{r}_0) dV(\vec{r}_0)$		
Força de Laplace	$\vec{F}_m = \int d\vec{F}_m$	Força	Newton	N	N
$d\vec{F}_m(\vec{r}_q) = dq \vec{v}_q \times \vec{B}(\vec{r}_q)$			$d\vec{F}_m(\vec{\ell}) = I d\vec{\ell} \times \vec{B}(\vec{\ell})$		
LEI DE GAUSS MAGNÉTICA					
$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \iff \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$			$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} = \rho_m$		
Magnetização	\vec{M}	$\frac{\text{Mom. Magnético}}{\text{Volume}}$	$\frac{Am^2}{m^3}$	$\frac{A}{m}$	$\frac{A}{m}$
Intens. Campo Magnético	\vec{H}	$\frac{\text{Corrente} \times \text{Volts}}{\text{Comprimento}}$	$\frac{\text{Ampere Volts}}{\text{Metro}}$	$\frac{A}{m}$	$\frac{A}{m}$
$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$			$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \implies \vec{B} = \mu \vec{H} \text{ (materiais LHI)}$ $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_r \mu_0$		
LEI DE AMPÈRE MAGNETOSTÁTICA					
$\oint_\gamma \vec{B}(\vec{\ell}) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{tot}(\gamma)$			$\oint_\gamma \vec{H}(\vec{\ell}) \cdot d\vec{\ell} = I_{cond}(\gamma)$		
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_c + \vec{J}_m)$			$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c^b$		
$\vec{J}_m(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$			$\vec{J}_m(\vec{r}_s) = \vec{M}(\vec{r}_s) \times \vec{n}_{ext}(\vec{r}_s)$		
LEI DE FARADAY-LENZ E CIRCUITOS MAGNÉTICOS					
Fluxo Magnético	Φ	$\vec{B} \times \text{Área}$	Weber	Wb	$\frac{J}{A}$
Indutância	L	$\frac{\text{Fluxo Magnético}}{\text{Corrente}}$	Henry	H	$\frac{J}{A^2}$
Permeabilidade	μ	$\frac{\text{Indutância}}{\text{Comprimento}}$	$\frac{\text{Henry}}{\text{Metro}}$	$\frac{H}{m}$	$\frac{J}{As}$
F.e.m. Indução Magnética	$\mathcal{E}_m^{(i)}$	$\frac{\text{Fluxo Magnético}}{\text{Tempo}}$	Volt	V	$\frac{J}{As}$
$\mathcal{E}_m^{(i)} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial S} \left(\frac{d\vec{\ell}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{\ell}$			$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$		
$\Phi_k = \iint_{S_k} \vec{B} \cdot d\vec{S} = L_k I_k + \sum_{j \neq k} M_{kj} I_j$			$\sum_{k \in \text{nó}} \Phi_k = 0 \ ; \ \sum_k N_k I_k = \sum_k \mathcal{R}_k \Phi_k \quad \left(\mathcal{R}_k = \frac{\ell_k}{\mu S_k} \right)$		
ENERGIA MAGNÉTICA, CONDIÇÕES FRONTEIRA E PRESSÃO MAGNÉTICA p_m					
$U_m = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k = \iiint \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$			$(dW)_\Phi = -(dU_m)_\Phi \ ; \ (dW)_I = +(dU_m)_I$		
$B_2^\perp - B_1^\perp = 0 \ ; \ H_2^\parallel - H_1^\parallel = 0$			$p_m = \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) \left(H_\parallel^2 + \frac{1}{\mu_1 \mu_2} B_\perp^2 \right)$		

^a $r^{-1}(\vec{\ell}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{\ell}|} \implies \nabla r^{-1}(\vec{\ell}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{\ell}|^3} (\vec{r}-\vec{\ell})$

^b $\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}_c(\vec{r}, t) + \vec{J}_d(\vec{r}, t)$ onde $\vec{J}_d(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ é a corrente de deslocamento. (Campos variáveis no tempo.)



4. Introdução, Historial e Unidades

Conteúdo

4.1	Interação à distância versus Forças de Contacto	73
4.1.1	Campos de Vetores	74
4.1.2	Princípio de Sobreposição	74
4.1.3	Simetrias	75
4.1.4	As simetrias espaciais	75
4.1.5	Simetrias não Espaciais	75
4.2	O Campo de uma Fonte Pontual	75

4.1 Interação à distância versus Forças de Contacto

Historicamente, os primeiros modelos de interação como a Teoria da Gravitação Newtoniana basearam-se no conceito de **Interação à Distância**, para o qual nada medeia a ação física que uma **fonte** origina e o seu efeito num objeto distante dessa fonte. O facto de esse efeito depender por exemplo da distância à fonte nada tem a ver com a existência de uma entidade que permeie todo o espaço e que sirva de suporte à propagação da ação física. Em oposição, o conceito de interação mediada por **Forças de Contacto** propõe que se associe à ação física duma **fonte**, e o seu efeito sobre um objeto, um **campo** correspondente a forças que atuam localmente num éter que assim propaga o efeito da fonte ao objeto distante. Dado que o campo se estende por todo o espaço, um objeto distante da fonte sentirá o efeito do campo correspondente na posição em que se encontra, desde que possua a "apetência" adequada para interagir com ele (esta "apetência" chama-se massa no caso gravítico, e no caso elétrico chama-se carga. Para um campo magnético poder-se-ia designar esta "apetência" de momento dipolar magnético, mas veremos que esta interação se pode descrever em termos de cargas elétricas em movimento, i.e. correntes.) Assim a noção de Campo para

descrever uma interação física aparece em reação à noção de Interação à Distância. Contudo estas duas noções não têm de ser mutuamente exclusivas, como parece indicar o trabalho fundamental de Feynman e Wheeler em 1945.¹

4.1.1 Campos de Vetores

O conceito de **Campo de Vetores** é uma generalização do conceito de função escalar definida num espaço, i.e. a atribuição de um valor $f(\vec{r})$ a cada ponto \vec{r} desse espaço. De facto poderíamos igualmente dizer que a função $f(\vec{r})$ define um **Campo de Escalares**. O exemplo mais simples em que os dois conceitos quase coincidem é o de função complexa $f(\vec{r}) \in \mathbb{C}$ quando se identifica \mathbb{C} com o plano de Argand \mathbb{R}^2 , especificamente identificando cada complexo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ com um vetor $\vec{z} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \in \mathbb{R}^2$. (Claro que a diferença fundamental é que uma função $f(\vec{r})$ tem valores num **Corpo** (onde os elementos se podem somar e multiplicar, e cada elemento tem um simétrico e um inverso), enquanto um campo de vetores toma valores num **Espaço Vetorial** (onde apenas a soma e existência do simétrico dos seus elementos está bem definida)). A aceitação deste conceito de campo trouxe vários benefícios, em particular a noção de propagação da ação física. De facto, para a interação à distância não existe uma escala temporal natural, e os primeiros modelos usavam efetivamente uma **Interação Instantânea à Distância**, significando isto que um movimento da fonte se refletia instantaneamente em todo o objeto distante que sofresse a sua ação. Mais tarde introduziram-se ações retardadas mas faltava uma justificação natural para esse efeito. Pelo contrário, se o efeito do movimento de uma fonte tiver de se propagar no campo correspondente como uma onda, então é natural que um objeto distante apenas sinta essa perturbação no campo quando a onda lá chegar. Um segundo benefício decorre da possibilidade de descrever localmente este campo, i.e. definir equações diferenciais que em cada ponto devem ser verificadas pelo campo, e que podem ser usadas em conjunto com condições fronteira adequadas e o conhecimento da localização das fontes para o determinar em todo o espaço. Em contraste a abordagem da interação à distância baseia-se num conceito de **Integral de Ação** cuja minimização determina as equações de movimento para o objeto distante. Embora esta esteja mais próximo de **Princípios Variacionais** básicos e assumidamente essenciais na nossa descrição da Natureza, a solução de equações integrais torna-se mais problemática do que a abordagem local proporcionada pelas equações de campo.

4.1.2 Princípio de Sobreposição

Em qualquer dos casos um axioma essencial que se adota designa-se por **Princípio de Sobreposição**, em que se pressupõe que:

O efeito, sobre um objeto distante, de várias fontes de uma mesma ação física é simplesmente a soma dos efeitos isolados de cada fonte sobre o mesmo objeto, no mesmo instante.

Este axioma tem implicações profundas, e em particular restringe a serem sempre lineares as equações que descrevem a associação entre as fontes e os campos correspondentes. Esta linearidade está na base do termo **vetor** na expressão **Campo de Vetores**, tanto quanto está na base do termo **integral** na expressão **Integral de Ação**. Com efeito, a sobreposição de campos é a soma de valores nos mesmos pontos do espaço, i.e. $\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \varphi(\vec{r})$. Isto implica que, fixando um ponto \vec{r}_o , a combinação linear de valores possíveis do campo em \vec{r}_o continua a ser um valor possível, e estas são as regras a que obedecem os elementos de um espaço vetorial $\mathfrak{V}(\vec{r})$, i.e. vetores. Claro que ainda assim fica muita liberdade para escolher o tipo de valor que estes campos podem tomar. Em particular convém especificar que em qualquer ponto \vec{r} do espaço o conjunto de valores

¹ J. A. Wheeler et al. «Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation». Em: *Reviews of Modern Physics* 17 (abr. de 1945), páginas 157–181.

$\mathfrak{V}(\vec{r})$ deve ser idêntico ao que se encontra noutra ponto diferente \vec{r}' , ou seja $\mathfrak{V}(\vec{r}) \simeq \mathfrak{V}(\vec{r}')$. (Este isomorfismo não é canónico contudo, e o seu reconhecimento levaria mais tarde à introdução do conceito de **Conexão Linear**.) Quando a dimensão de $\mathfrak{V}(\vec{r})$ é igual ou inferior à do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 a visualização do campo torna-se particularmente fácil graficamente, uma vez que os vetores do campo podem ser embebidos no próprio espaço euclidiano afim $\{\mathcal{O}, \mathbb{R}^3\}$. Este foi aliás o caminho historicamente percorrido na descrição dos campos elétrico e magnético antes do advento da Relatividade Restrita e o reconhecimento que de facto a Interação Eletromagnética é descrita por um único campo vetorial de dimensão 6 no espaço-tempo quadridimensional.

4.1.3 Simetrias

4.1.4 As simetrias espaciais

Simetria de translação $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^3$:

Em geral, uma translação num espaço afim \mathfrak{A} é uma transformação $\mathcal{T} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ definida por um vetor $\vec{a} \in \mathbb{V}$, onde \mathbb{V} é o espaço vetorial associado a \mathfrak{A} , que a qualquer ponto $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}$ faz corresponder o ponto $\mathcal{P}' = \mathcal{T}(\mathcal{P}) = \mathcal{P} + \vec{a}$. Uma função $f(\vec{r})$ é simétrica para uma translação \mathcal{T} se $f(\mathcal{T}(\vec{r})) = f(\vec{r})$ para qualquer valor do argumento \vec{r} .

Simetria de rotação $\mathcal{R} \in \mathbb{SO}_3$:

Uma rotação dum espaço afim métrico \mathfrak{A} é uma transformação deste que preserva as distâncias entre quaisquer pares de pontos antes e depois de rodados (ou os ângulos entre quaisquer duas direções). Do ponto de vista do espaço vetorial \mathbb{V} associado a \mathfrak{A} um par de pontos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ define um vetor $\vec{a}_{12} = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$ tal que a distância $d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \sqrt{g(\vec{a}_{12}, \vec{a}_{12})}$, onde a métrica $g(.,.)$ é uma forma bilinear simétrica não-degenerada. Isto significa que cada rotação \mathcal{R} pode ser representada por uma matriz $\mathbb{A} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que

$$g(\mathbb{A}\vec{a}, \mathbb{A}\vec{b}) = g(\vec{a}, \vec{b}) \equiv g(\vec{a}, \mathbb{A}^\top \mathbb{A} \vec{b}) \implies \mathbb{A}^\top \mathbb{A} = 1 = \mathbb{A} \mathbb{A}^\top$$

e além disso $\det(\mathbb{A}) = 1$ para as rotações próprias (i.e. que preservam a orientação relativa de triedros).

Simetria Cilíndrica $\mathcal{H} \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$: Invariância para translações na direção de um eixo e para rotações em torno do mesmo eixo.

Simetria Axial $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^1$: Invariância para rotações em torno de um eixo.

Simetria Discreta de Reflexão Plana $\mathcal{M} \in \mathbb{Z}_2$: Invariância para reflexões num espelho.

Simetria Discreta de Paridade (Reflexão na Origem) $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$:

Simetria Discreta de Inversão Temporal $\mathcal{T} \in \mathbb{Z}_2$:

Simetria Discreta de Inversão de Carga $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}_2$:

4.1.5 Simetrias não Espaciais

Simetria de Escala (Conforme) : $\lambda \in \mathbb{C}$

Simetria de Gauge : $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

4.2 O Campo de uma Fonte Pontual

Em geral a determinação dos campos associados a uma distribuição de fontes só é possível a partir do conhecimento das equações definidoras. Mas para distribuições de fontes com elevada simetria muito se pode adiantar sobre a constituição do campo. Considere-se por exemplo um campo tridimensional ($\mathfrak{V}(\vec{r}) \simeq \mathbb{R}^3, \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$) associado a uma fonte pontual. Este campo deve permanecer invariante quando se realiza sobre o espaço uma rotação qualquer em torno de um eixo que passe pela fonte, porque para todos os efeitos uma fonte pontual não tem estrutura que nos permita distinguir as suas diversas posições rodadas. Isto significa que ao rodar o campo com

a fonte $\mathcal{R} \cdot \varphi(\mathcal{R}^{-1} \cdot \vec{r}) = \varphi(\vec{r})$, i.e. o valor do campo φ no ponto genérico \vec{r} é igual ao valor que φ tinha em $\mathcal{R}^{-1} \cdot \vec{r}$ antes da rotação, seguido da rotação \mathcal{R} . (Claro que estamos aqui a considerar que $\mathcal{R} \cdot \mathfrak{V}(\vec{r}) \equiv \mathfrak{V}(\mathcal{R} \cdot \vec{r})$ e que a representação do grupo de rotações SO_3 sobre $\mathfrak{V}(\vec{r})$ é idêntica à de SO_3 sobre \mathbb{R}^3 .) Concluímos assim que conhecendo o campo num ponto \vec{r} , ficamos a saber que o campo em qualquer outro ponto \vec{r}' da esfera S_r , centrada na fonte e passando por \vec{r} se obtém daquele usando qualquer combinação de rotações que leve \vec{r} para \vec{r}' . Isto porque SO_3 sendo um grupo e $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ duas rotações que lhe pertencem, também $\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2$ o é. Mas o único campo vetorial que fica invariante para qualquer combinação de rotações é um campo radial

$$\vec{v}(\vec{r}) = v(r) \vec{e}_r$$

dirigido para a fonte na origem. Para nos convenceremos disso argumentamos com outra simetria que o campo deve ter: se fizermos passar um plano pelo ponto \vec{r} e pela fonte na origem, então uma **reflexão** através do plano também deve deixar o campo invariante, i.e.

$$\vec{v}(\mathcal{S} \cdot \vec{r}) \equiv \vec{v}(\vec{r}) \equiv \mathcal{S} \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

onde $\mathcal{S} \in S_2$ é a representação do grupo discreto simétrico $S_2 = \{\mathcal{I}, \mathcal{S}\}$ onde $\mathcal{S}^2 = \mathcal{I}$, (i.e $\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}$) com

$$\mathcal{S} \cdot \vec{r}' = \vec{n} \times (\vec{r}' \times \vec{n}) - (\vec{r}' \cdot \vec{n}) \vec{n} = \vec{r}' - 2(\vec{r}' \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Aqui \vec{n} representa a normal ao plano escolhido, e obviamente para um ponto \vec{r} desse plano, $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ donde $\mathcal{S} \cdot \vec{r} = \vec{r}$. Conclui-se então que o vetor $\vec{v}(\vec{r})$ é invariante apenas se pertencer ao próprio plano, já que

$$\vec{v}(\mathcal{S} \cdot \vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) - 2(\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Uma vez que por dois pontos passam uma infinidade de planos, este argumento é válido para qualquer deles, pelo que o vetor $\vec{v}(\vec{r})$ só pode ser invariante em todos os casos se pertencer a todos os planos, ou seja se for colinear com a reta de intersecção desses planos. Esta reta é definida pela fonte na origem e o ponto \vec{r} , daí que $\vec{v}(\vec{r})$ seja radial.

Dada a simetria esférica de uma fonte pontual podemos ver que o integral do campo \vec{v} sobre uma superfície esférica centrada na fonte deve ser apenas uma função do raio r desta porque as rotações não devem afetar este valor (tanto o campo como a superfície são invariantes para estas rotações). Em particular o fluxo do campo através dessa superfície é invariante, pelo que

$$Q(r) = \oiint_{S_r} \vec{v}(\vec{s}) \cdot d\vec{S}(\vec{s}) = v(r) 4\pi r^2$$

donde se conclui que em geral o campo de uma fonte pontual, obedecendo às condições acima impostas, deve ser radial e da forma

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{Q(r)}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

A forma da função $Q(r)$ depende agora de outros detalhes da interação, mas pode-se adiantar que tanto no caso gravítico ($Q(r) = 4\pi GM$) como no caso eletrostático ($Q(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$) esta função é assumidamente constante e respetivamente proporcional à massa M e à carga q das respetivas fontes pontuais. As experiências de Eötvos e outros permitiram determinar com grande precisão que a dependência destes campos em r é da forma $\frac{k}{r^2}$. Recentemente, alegações sobre a existência de uma **quinta força** baseiam-se na suposta observação de desvios desta regra para materiais da

mesma massa mas diferentes substâncias. De forma semelhante, experiências procurando medir esta dependência em r para interações gravíticas entre objetos a distâncias inferiores a 0.1 mm são importantes na determinação de dimensões extras para o espaço em que vivemos e que, de acordo com as modernas teorias de cordas, poderiam explicar porque é que a interação gravítica é tão mais fraca (10^{-40} vezes) que as outras interações conhecidas, ou porque é que não observamos quase toda a **energia negra** necessária para justificar a expansão observada do Universo (faltaria ainda encontrar 10^{60} vezes mais que a energia negra já contabilizada, se este modelo de universo estiver correto, claro).

Um resultado matemático conhecido² mostra que $Q(r) = \oiint_{S_r} \vec{v}(\vec{s}) \cdot d\vec{S}(\vec{s}) = \iiint_{V_r} \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) dV(\vec{r})$, onde $S_r = \partial V_r$ é a fronteira que delimita o volume V_r , pelo que podemos assemelhar

$$\rho(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

a uma densidade volúmica. Ao assumir que $Q(r) = c^{te}$ estamos a dizer que esta densidade de facto é da forma $\rho(\vec{r}) = c^{te} \delta(\vec{r})$, onde $\delta(\vec{r} - \vec{r}_o)$ é a distribuição delta de Dirac centrada em \vec{r}_o . Assim o integral de volume de $\rho(\vec{r})$ é sempre

$$\iiint_V \rho(\vec{r}) dV(\vec{r}) = c^{te} \iiint_V \delta(\vec{r}) dV(\vec{r}) = \begin{cases} c^{te} & \text{se } V \text{ contém a origem} \\ 0 & \text{se } V \text{ não contém a origem} \end{cases}$$

Tudo o que dissemos até agora se mantém praticamente inalterado se em vez de uma fonte pontual considerarmos uma fonte de dimensão finita com simetria esférica. A única alteração diz respeito ao último parágrafo, em que dentro da fonte a forma da densidade volúmica deixa de ser singular mas exhibe apenas uma dependência em r .

² Uma versão do Teorema de Stokes designada Teorema de Green ou do Fluxo-Divergência

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 4\pi \delta(\vec{r}) \quad : \quad \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$$

Relembrando a definição de ângulo sólido elementar $d\Omega = \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot d\vec{S}$, quando a origem está dentro de uma superfície fechada $S = \partial V$

$$\Omega = \iint_S d\Omega = \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) dV = 4\pi \iiint_V \delta(\vec{r}) dV = 4\pi$$

William Gilbert	Inglês	1540 1603	Médico	Investigação experimental de Eletricidade estática (fricção) e do Magnetismo (<i>De Magnete</i> , 1600).
Stephen Gray	Inglês	1666 1736	Astrónomo	Descobre que há condutores e isolantes elétricos (1711).
Charles Dufay	Francês	1698 1739	Químico	Descobre que existem apenas duas formas de Eletricidade (1733).
Benjamin Franklin	Amer.	1706 1790	Tipógrafo Político	Princípio da Conservação de Carga (1751). Inventor do Pára-Raios.
Joseph Priestley	Inglês	1733 1804	Químico	Descobridor do Oxigénio. Mostra que no interior de uma cavidade metálica vazia não existe força elétrica, nem carga na superfície interna (1767). Primeira suspeita de que a força elétrica varia com o inverso do quadrado da distância.
Joseph-Louis Lagrange	Francês	1736 1813	Matemático	Conceito de potencial gravítico (1772)
Pierre-Simon Laplace	Francês	1749 1827	Matemático	Equação para o potencial na ausência de cargas (1782).
Charles Augustin Coulomb	Francês	1736 1806	Engenheiro	Balança de Torção. Lei do inverso-quadrado da distância (1788).
Luigi Galvani	Italiano	1737 1798	Anatomista Biólogo	Eletricidade animal e correntes elétricas (1791)
Alessandro Volta	Italiano	1745 1827	Físico	Pilha Voltaica (1800). Capacidade e Potencial $Q = CV$
Siméon-Dennis Poisson	Francês	1781 1840	Matemático	Equação para o potencial na presença de cargas (1813).
Hans Christian Oersted	Dinam.	1777 1851	Físico	Deflexão duma bússola por uma corrente elétrica (1820).
André-Marie Ampère	Francês	1775 1836	Matemático Químico	Explicação Matemática do Eletromagnetismo de Oersted (1820). Mede a Força entre dois condutores com corrente elétrica Correntes criam Magnetismo.
Michael Faraday	Inglês	1791 1867	Químico, Físico Exp.	Indução Eletromagnética (1831). Eletrólise Magnetismo e Polarização da luz (1845). Diamagnetismo.
James Clerk Maxwell	Escocês	1831 1879	Físico	Teoria Matemática do Eletromagnetismo (1856-1864), Termodinâmica e Física Estatística. Teoria da Cor, 1ª Fotografia a Cores (1861).
Heinrich Hertz	Alemão	1857 1894	Físico	Prova a existência de Ondas Eletromagnéticas (1886)
Hendrik Antoon Lorentz	Holandês	1853 1928	Físico	Teoria Microscópica do Eletromagnetismo (teoria dos Elétrons) (1875). Transformação de Lorentz (1895-1904).
Max Planck	Alemão	1858 1947	Físico	Quantização da energia em múltiplos de \hbar para explicar o espectro de radiação dum corpo negro (1900)
Albert Einstein	Alemão	1879 1955	Físico	Efeito Foto-elétrico e o conceito de fóton (1905). Teoria de relatividade restrita.
Robert Andrews Millikan	Amer.	1868 1953	Físico	Experiência para medir a carga de um eletrão (1910-1913) que hoje se considera como $e = 1.60217653(14) \times 10^{-19} C$.

Tabela 4.1: Quadro histórico de eletromagnetismo

Designação	Grandeza	Dimensões	Unidades	Símbolo	SI
Campo Elétrico	\vec{E}	$\frac{\text{Força}}{\text{Carga}}$	$\frac{\text{Volt}}{\text{Metro}}$	$\frac{V}{m}$	$\frac{N}{As}$
Potencial Elétrico	φ, V, ϕ	Campo Elétrico \times Distância	Volt	V	$\frac{J}{As}$
Deslocamento Elétrico	\vec{D}	$\frac{\text{Carga}}{\text{Área}}$	$\frac{\text{Coulomb}}{\text{Metro}^2}$	$\frac{C}{m^2}$	$\frac{As}{m^2}$
Força Eletromotriz	ε_{fem}	$\frac{\text{Energia}}{\text{Carga}}$	Volt	V	$\frac{J}{As}$
Corrente Elétrica	I	$\frac{\text{Carga}}{\text{Tempo}} = \frac{\text{Potência}}{\text{Volt}}$	Ampere	A	A
Carga Elétrica	Q	Corrente \times Tempo = $\frac{\text{Energia}}{\text{Volt}}$	Coulomb	C	As
Resistência ^a	R	$\frac{\text{Potencial}}{\text{Corrente}}$	Ohm	Ω	$\frac{J}{A^2s}$
Condutividade	σ_c	$\frac{\text{Densidade Corrente}}{\text{Campo Elétrico}}$	$\frac{\text{Siemens}}{\text{Metro}}$	$\frac{S}{m}$	$\frac{A^2s}{Jm}$
Capacidade	C	$\frac{\text{Carga}}{\text{Potencial}}$	Farad	F	$\frac{A^2s^2}{J}$
Constante Dielétrica ^b	ε	$\frac{\text{Capacidade}}{\text{Comprimento}}$	$\frac{\text{Farad}}{\text{Metro}}$	$\frac{F}{m}$	$\frac{A^2s^2}{Jm}$
Polarização	\vec{P}	$\frac{\text{Momento Dipolar}}{\text{Volume}}$	$\frac{\text{Coulomb} \times \text{Metro}}{\text{Metro}^3}$	$\frac{C}{m^2}$	$\frac{As}{m^2}$
Vetor de Poynting	\vec{S}	$\frac{\text{Potência}}{\text{Área}}$	$\frac{\text{Watt}}{\text{Metro}^2}$	$\frac{W}{m^2}$	$\frac{J}{sm^2}$
Intensidade Radiação	I	$\frac{\text{Potência}}{\text{Ângulo Sólido}}$	$\frac{\text{Watt}}{\text{Esteradiano}}$	$\frac{W}{sr}$	$\frac{J}{s sr}$
Campo Magnético	\vec{H}	$\frac{\text{Corrente Atravessam.}}{\text{Comprimento}}$	$\frac{\text{Ampere}}{\text{Metro}}$ (Oersted) _{CGS}	$(Oe = \frac{10^3 A}{4\pi m})$	$\frac{A}{m}$
Indução Magnética	\vec{B}	$\frac{\text{Força}}{\text{Carga} \times \text{Velocidade}}$	Tesla (Gauss) _{CGS}	$T (G = 10^{-4}T)$	$\frac{N}{Am}$
Fluxo Magnético	Φ	Indução Magnética \times Área	Weber (Maxwell) _{CGS}	$Wb (Mx = 10^{-8}Wb)$	$\frac{J}{A}$
Indutância	\mathcal{L}	$\frac{\text{Fluxo Magnético}}{\text{Corrente}}$	Henry	H	$\frac{J}{A^2}$
Permeab. Magnética ^c	μ	$\frac{\text{Indutância}}{\text{Comprimento}}$	$\left(\frac{\text{Gauss}}{\text{Oersted}}\right)$ _{CGS}	$\frac{H}{m}$	$\frac{J}{A^2m}$
Mom. Dipol. Magnético	\vec{m}	$\frac{\text{Torque}}{\text{Indução Magnética}}$	$\frac{\text{Newton} \times \text{Meter}}{\text{Tesla}}$	$\frac{Nm}{T}$	Am^2

^a O inverso da Resistência é a Condutância (Mho (\mathcal{U})). A unidade Mho também se designa Siemens (S)

^b Ou Permitividade Eléctrica. Para o ar $\varepsilon_o = 10^7/(4\pi c^2)$ (F/m) onde $c = 1/\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}$ é a velocidade da luz no vazio.

^c Para o ar, e a maioria dos materiais não magnéticos $\mu_o = 4\pi 10^{-7}$ (H/m)

Tabela 4.2: Grandezas Elétricas e suas Dimensões no sistema SI

Referências

- [1] J. A. Wheeler e R. P. Feynman. «Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation». Em: *Reviews of Modern Physics* 17 (abr. de 1945), páginas 157–181 (ver página 74).



Eletróstática

5	Eletróstática	83
5.1	Caracterização da Carga Elétrica	
5.2	Campo Elétrico e Lei de Coulomb	
5.3	Transformação do Campo Eletromagnético	
5.4	Linhas de Campo e Equipotenciais	
5.5	Lei de Gauss	
5.6	Condutores: Propriedades Eletróstáticas	
5.7	O potencial escalar V do campo eletrostático $\vec{E} = -\nabla V$	
5.8	Determinação do campo eletrostático a partir do cálculo do potencial ϕ .	
5.9	Equação de Poisson	
5.10	Solução exata pelo método de imagens	
5.11	Condensadores e Capacidade	
5.12	Energia Eletróstática em Condensadores	
5.13	Densidade de Energia Eletróstática	
6	Eletróstática na Matéria	151
6.1	Campo Elétrico na Matéria: Não-Condutores ou Dielétricos	
6.2	Capacidade e Condensadores	
6.3	Campo Elétrico na Matéria: Condutores e Corrente Elétrica Estacionária.	
6.4	Lei de Ohm: $\vec{J} = \sigma_e \vec{E}$	



5. Eletrostática

Conteúdo

5.1	Caracterização da Carga Elétrica	84
5.2	Campo Elétrico e Lei de Coulomb	85
5.2.1	Força sobre uma carga q em \vec{r} no campo $\vec{E}_1(\vec{r})$ de q_1 em \vec{r}_1	85
5.2.2	Comparação entre a força elétrica e a força gravitacional.	88
5.2.3	Força devida a uma Distribuição de N Cargas.	89
5.3	Transformação do Campo Eletromagnético	93
5.4	Linhas de Campo e Equipotenciais	94
5.4.1	Linhas de Campo de \vec{E}	94
5.4.2	Campos Planos com Simetria de Translação	96
5.4.3	Campos planos com Simetria Axial de Rotação	98
5.5	Lei de Gauss	100
5.5.1	Forma integral da Lei de Gauss:	102
5.5.2	Forma Local da Lei de Gauss: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	103
5.5.3	Lei de Gauss: Aplicações	104
5.6	Condutores: Propriedades Eletrostáticas	106
5.6.1	Pressão Electrostática na superfície de um condutor.	107
5.7	O potencial escalar V do campo eletrostático $\vec{E} = -\nabla V$	108
5.7.1	Apêndice Matemático: Operador Gradiente:	108
5.7.2	Apêndice Matemático: Operador Rotacional:	109
5.7.3	Campos Conservativos	109

5.7.4	O Potencial Escalar $\phi(r)$	111
5.7.5	Apêndice Matemático: $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$	112
5.8	Determinação do campo eletrostático a partir do cálculo do potencial ϕ.	113
5.8.1	Cálculo do potencial escalar ϕ a partir das cargas	113
5.8.2	Energia de uma distribuição contínua de cargas.	120
5.8.3	Força e pressão em Dielétricos na ausência de cargas livres	122
5.9	Equação de Poisson	124
5.9.1	Cálculo do potencial escalar ϕ pelo Método das Imagens	128
5.10	Solução exata pelo método de imagens	139
5.10.1	Apêndice Matemático: Operador Divergência	139
5.10.2	Apêndice Matemático: Operador Laplaciano $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$	140
5.10.3	Equação de Poisson: $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	140
5.10.4	Problemas potenciais em outras áreas:	140
5.10.5	Solução Geral da Equação de Laplace para cargas em condutores.	142
5.11	Condensadores e Capacidade	142
5.11.1	Coeficientes de Capacidade (<i>Farad</i>)	142
5.12	Energia Eletrostática em Condensadores	146
5.12.1	Energia de uma distribuição discreta de cargas	147
5.12.2	Energia de um sistema de N condutores carregados	147
5.12.3	Energia de uma distribuição contínua de cargas.	147
5.13	Densidade de Energia Electrostática	148
5.13.1	Densidade de Energia num condensador plano de área A e separação d	148
5.13.2	Condensador cilíndrico e comprimento L	148
5.13.3	Condensador esférico de raios R_i e R_e	149
5.13.4	Trabalho Realizado para carregar um Condensador de Capacidade C	149
5.13.5	Energia num Condensador plano de área A e separação d	149

5.1 Caracterização da Carga Elétrica

- Na natureza a maior parte dos objetos não apresenta uma carga elétrica detetável, mas a fricção ou processos químicos podem fazer aparecer cargas elétricas em objetos anteriormente neutros.
- Apenas dois tipos de carga foram observadas até hoje, designadas de positiva e negativa. Por exemplo friccionando Vidro com um pano de Seda obtém-se carga Positiva (+) no vidro e carga Negativa (-) na seda, enquanto que friccionando Borracha com Pele de coelho obtém-se carga Negativa na borracha e carga Positiva na pele.
- Dois objetos carregados eletricamente exercem força um sobre o outro, e ou se repelem ou se atraem: no primeiro caso ambos têm cargas com o mesmo sinal (positiva/positiva ou negativa/negativa) enquanto no segundo devem ter cargas com sinais opostos (positiva/negativa).
- A carga elétrica é transferível parcial ou totalmente de um objeto para outro por contacto.

- É altamente móvel em objetos metálicos (condutores) i.e. distribui-se e transfere-se de um lado para outro nesses objetos. Pelo contrário, em objetos isolantes, como o vidro e os plásticos, a carga não se redistribui nem se desloca facilmente duma região para outra.
- A carga total dum conjunto de objetos é igual à soma das cargas individuais em cada um.
- A carga total de um sistema eletricamente isolado é constante, ou seja mesmo que haja transferências de cargas entre os objetos no sistema, a carga total do conjunto não se pode alterar (a menos que se importe ou retire carga do sistema por meios exteriores, mas nesse caso o sistema deixaria de ser considerado como isolado.)
- A carga elétrica é invariante para mudanças de referencial, ou seja o movimento relativo dos objetos não afeta o valor das suas cargas elétricas.
- A carga elétrica é quantizada, ou seja existe em múltiplos inteiros de uma carga fundamental, a carga do eletrão $q_e \approx 1.6021 \times 10^{-19}$ *Coulomb* (Millikan 1909).

5.2 Campo Elétrico e Lei de Coulomb

O campo elétrico $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ criado por uma carga pontual q_1 na posição \vec{r}_1 é na prática definido pela força elétrica sentida por uma unidade de carga no ponto \vec{r} no instante t .¹ Assumindo que as cargas se encontram estacionárias (Eletrostática) a dependência temporal é omitida. A força sentida por uma carga q no mesmo ponto será q vezes maior que a sentida por uma carga unitária, donde $\vec{F}_1(\vec{r}, t) = q\vec{E}_1(\vec{r}, t)$. Por via de métodos experimentais (balança de Torção) o engenheiro francês Charles Augustin Coulomb chegou em 1788 à conclusão que esta força varia com o inverso do quadrado da distância e que era dirigida segundo a reta que unia os pontos \vec{r} e \vec{r}_1 , donde a Lei de Coulomb:

$$\vec{F}_1(\vec{r}, t) = k_c \frac{q q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) = q \vec{E}_1(\vec{r}, t)$$

5.2.1 Força sobre uma carga q em \vec{r} no campo $\vec{E}_1(\vec{r})$ de q_1 em \vec{r}_1

Definição 5.2.1 — A Lei de Coulomb.

- A **Força de Coulomb** entre duas cargas q_1 e q_2 , colocadas respetivamente em \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , é:
- proporcional ao produto $q_1 q_2$ das cargas elétricas.
 - inversamente proporcional ao quadrado da distância $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ entre as cargas.

¹ Na realidade, o campo $\vec{E}_1(\vec{r}_2, t_2)$, em \vec{r}_2 no instante t_2 , devido a uma carga q_1 à distância r na posição $\vec{r}_1(t_1)$ no instante $t_1 = t_2 - \frac{r}{c}$ é mais rigorosamente

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2, t_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r^3} + \frac{r}{c} \frac{d}{dt_2} \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r^3} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt_2^2} \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r} \right) \right)$$

onde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1(t_1)$. Mais geralmente, Jefimenko[1] mostra que

$$\vec{E}(\vec{r}_2, t_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \left(\left(\frac{\rho(\vec{r}_1)}{r^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}_1)}{\partial t_2} \right) \vec{u}_{12} - \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}_1)}{\partial t_2} \right) dV_1$$

$$\vec{B}(\vec{r}_2, t_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{r^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}_1)}{\partial t_2} \right) \times \vec{u}_{12} dV_1$$

com $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, $t_1 = t_2 - \frac{r}{c}$ e $\vec{u}_{12} = \frac{1}{r} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.

- alinhada com a reta que passa pelas posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 das cargas, com direção paralela aos **versores** (vetores de magnitude 1) \vec{u}_{12} e \vec{u}_{21} , onde

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\vec{u}_{21} = -\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Teorema 5.2.1 — Princípio de Ação-Reação.

A interação elétrica entre duas cargas estacionárias verifica o **Princípio de Ação-Reação**:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- A força que a carga q_2 exerce sobre a carga q_1 é, em \vec{r}_1 ,

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1) = k_c \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} = k_c \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (N)$$

- A força que a carga q_1 exerce sobre q_2 é, em \vec{r}_2 ,

$$\vec{F}_{21}(\vec{r}_2) = -\vec{F}_{12}(\vec{r}_1) = k_c \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (N)$$

- As forças entre duas cargas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Repulsivas} \quad \text{se } q_1 \text{ e } q_2 \text{ têm o mesmo sinal (++) ou (--)} \\ \text{Atrativas} \quad \text{se } q_1 \text{ e } q_2 \text{ têm sinais contrários (+- ou -+)} \end{array} \right.$$

Definição 5.2.2 — Constante de Coulomb k_c .

A constante de proporcionalidade k_c depende do sistema de unidades que se convencionou usar:

- No sistema SI o seu valor é

$$k_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \approx 9 \times 10^9 \quad (Nm^2 C^{-2})$$

onde

$$c = 299\,792\,458 \left(\frac{Km}{s}\right) \approx 3 \times 10^8 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12} \left(\frac{C}{Vm}\right)$$

é a **Velocidade da Luz no Vácuo**.

é a **Permeabilidade Elétrica do Vácuo**.

- No sistema CGS tem-se ^a

$$k_c = 1 \quad (\text{dine } cm^2 \text{ ues}^{-2})$$

^a A unidade eletrostática de carga (ues) (também designada *statcoulomb* (*statC*) ou *Franklin* (*Fr*) está relacionada com o *Coulomb*: $1 C \approx 299.8 \times 10^7 \text{ ues}$ e $1 \text{ statV} \approx 299.8 V$.

Definição 5.2.3 — Campo Elétrico Estacionário.

O campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ criado em \vec{r} por uma carga estacionária q na posição \vec{r}_q é a Força de

Coulomb por unidade de carga ($Q = 1\text{ C}$) na posição \vec{r} :

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{Qq}(\vec{r})}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2} \vec{u}_q \quad \left(\frac{N}{C} \equiv \frac{V}{m}\right)^a \quad (5.1)$$

^a O Volt é uma unidade SI derivada: $V = \frac{Nm}{C} = \frac{W}{A}$.

- A distância $|\vec{r} - \vec{r}_q| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)} = \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2} = \sqrt{r^2 + r_q^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_q}$ é independente da escolha de origem ou direções de referência.
- O versor $\vec{u}_q = \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}$ tem magnitude $|\vec{u}_q| = 1$ e aponta de \vec{r}_q para \vec{r} .
- O campo elétrico tem dimensões de força por unidade de carga $\left(\frac{N}{C} \equiv \frac{V}{m}\right)$.
- Unidades de \vec{E} : $\left(\frac{N}{C} \equiv \frac{V}{m}\right) \implies V(\text{Volt}) = \left(\frac{Nm}{C} \equiv \frac{J}{C} \equiv \frac{W}{A}\right)$
- Campo Elétrico à Superfície da Terra: $\vec{E} \simeq 100 \frac{V}{m}$
- Descarga Elétrica na Atmosfera (raio): $Q \simeq 20 - 30\text{ C}$

Definição 5.2.4 — Módulo de Torção ou Cisalhamento \mathcal{G} .

Forças de Cisalhamento são forças que atuam tangencialmente à face em que estão aplicadas. Num cilindro reto circular de raio R , massa M e altura ℓ , quando uma base roda de θ em relação à outra mantida fixa, podemos definir:

- Ângulo de Torção à distância r do eixo:

$$\alpha(r) = \frac{r\theta}{\ell}$$

- Tensão de Cisalhamento:

$$\vec{T}_c(r) = \mathcal{G}\alpha(r)\vec{e}_\theta \quad (Pa = \frac{N}{m^2})$$

- Força num elemento de área dS :

$$d\vec{F}_\parallel(r) = \vec{T}_c(r)dS(r)$$

- Torque de força \vec{F}_a com braço \vec{r} :

$$\vec{N}_a = \vec{r} \times \vec{F}_a$$

- Torque de Restituição:

$$\begin{aligned} \vec{N}_r &= - \iint_S \vec{r} \times d\vec{F}_\parallel(r) = - \iint_S r \vec{e}_r \times \vec{T}_c(r) dS(r) = \\ &= - \int_0^R \int_0^{2\pi} (r \vec{e}_r) \times \left(\mathcal{G} \frac{r\theta}{\ell} r dr d\theta \vec{e}_\theta \right) = -\mathcal{G} \frac{\pi R^4}{2\ell} \theta \vec{e}_z = -\kappa_\tau \theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

- Constante de torção: $\kappa_\tau = \mathcal{G} \frac{\pi R^4}{2\ell}$

- Equação de Movimento: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_r \implies I\ddot{\theta} = -\kappa_\tau \theta \quad ; \quad \omega_o = \sqrt{\frac{\kappa_\tau}{I}}$

- Momento de Inércia: $I = \frac{1}{2} \pi R^4 \ell$

- Módulo de Cisalhamento: $\mathcal{G} = \frac{2\kappa_\tau \ell}{\pi R^4} = \frac{2I \ell \omega_o^2}{\pi R^4} = \frac{M \ell \omega_o^2}{\pi R^2} = \rho \ell^2 \omega_o^2$

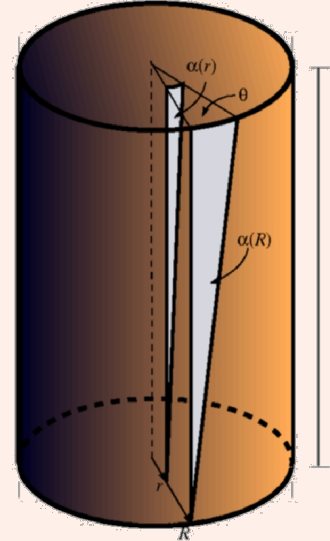


Figura 5.1: Torção de um cilindro de raio R e altura ℓ .

5.2.2 Comparação entre a força elétrica e a força gravitacional.

Entre cargas elementares a intensidade da interação elétrica (atractiva ou repulsiva) é cerca de 10^{40} vezes mais forte que a atração gravitacional entre as suas massas. Contudo, dada a existência de cargas positivas e negativas, já à escala molecular a matéria é tendencialmente eletricamente neutra, o que à escala macroscópica torna a força gravítica predominante, uma vez que as massas são sempre positivas.

■ Exemplo 5.1 ÁTOMO DE HIDROGÉNIO

Átomo de Hidrogénio = 1 protão+1 electrão à distância $r_H = 5.3 \times 10^{-11} m$
 Para um átomo de Hidrogénio

Partícula	Carga (C)	Massa (Kg)
Electrão	$-1.6021917 \times 10^{-19}$	9.1095×10^{-31}
Protão	$+1.6021917 \times 10^{-19}$	1.67261×10^{-27}
Neutrão	0	1.67261×10^{-27}

Usando a Lei de Coulomb

$$|\vec{F}_{ep}|_{el.} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e q_p}{r_H^2} = 8.21316 \times 10^{-8} N \quad \text{com} \quad \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \approx 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \\ q_e = -1.60218 \times 10^{-19} C \\ q_p = 1.60218 \times 10^{-19} C \\ r_H = 5.3 \times 10^{-11} m \end{cases} \quad (5.2)$$

Por outro lado, pela Lei de Atração Universal de Newton

$$|\vec{F}_{ep}|_{gr.} = G \frac{m_e m_p}{r_H^2} = 3.62026 \times 10^{-47} (N) \quad \text{com} \quad \begin{cases} G = 6.67428 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2} \\ m_e = 9.10938 \times 10^{-31} Kg \\ m_p = 1.67262 \times 10^{-27} Kg \\ r_H = 5.3 \times 10^{-11} m \end{cases} \quad (5.3)$$

Em suma, a razão das magnitudes das forças elétrica e gravitacional entre um protão e um electrão a qualquer distância é sempre

$$\frac{|\vec{F}_{ep}|_{el.}}{|\vec{F}_{ep}|_{gr.}} = \frac{8.21316 \times 10^{-8}}{3.62026 \times 10^{-47}} = 2.26867 \times 10^{39} \quad (5.4)$$

■

5.2.3 Força devida a uma Distribuição de N Cargas.

Definição 5.2.5 PRINCÍPIO DE SOBREPOSIÇÃO.

O campo \vec{E} criado em \vec{r} por N cargas q_i é a soma dos N campos de cada carga separadamente.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

O princípio de sobreposição permite-nos reduzir a origem da força elétrica sentida por uma carga q no ponto \vec{r} à soma de campos causados por cargas individuais (e pontuais) q_i localizadas em \vec{r}_i .

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \right) = q \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r})$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \therefore \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \right)$$

Note que o campo elétrico \vec{E}_q da carga q não contribui para a força sentida pela própria. O campo elétrico total $\vec{E}_{tot} = \vec{E} + \vec{E}_q$ em qualquer ponto do espaço não é idêntico ao campo sentido pela carga q .

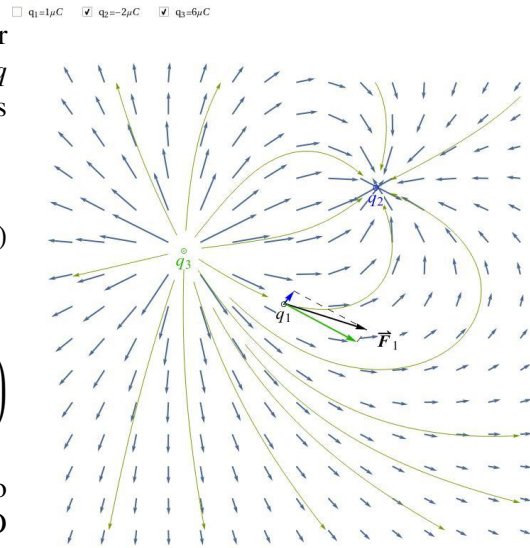


Figura 5.2: Força sobre a carga q_1 no campo das cargas q_2 e q_3 .

■ Exemplo 5.2 — Campo de um Dipolo Elétrico.

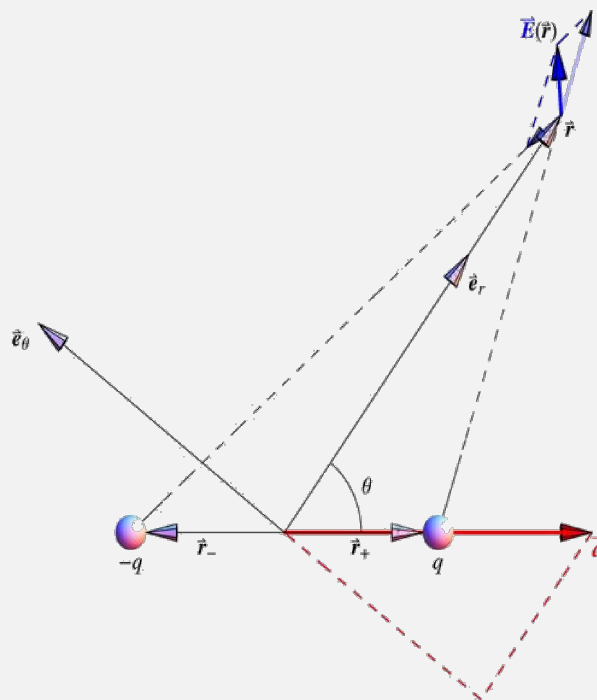


Figura 5.3: Contribuições de q e $-q$ para o campo $\vec{E}(\vec{r})$ dum dipolo com momento dipolar $\vec{p} = q\vec{d}$.

Um dipolo elétrico é formado por cargas iguais e de sinal contrário $\pm q$ em posições \vec{r}_{\pm} , separadas

portanto por uma distância $\vec{d} = |\vec{r}_+ - \vec{r}_-|$. O produto

$$\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \quad (mC)$$

designa-se **Momento Dipolar** e é um vetor associado frequentemente com a polarização elétrica da matéria (ou seja, a polarização é o valor médio de momentos dipolares à escala molecular). Num ponto do espaço \vec{r} o campo elétrico gerado por um dipolo, centrado na origem, de momento dipolar $\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \equiv p \vec{e}_z$ é rigorosamente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_+}{|\vec{r} - \vec{r}_+|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_-}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3} \right) \quad (5.5)$$

Quando o dipolo está centrado na origem $\vec{r}_+ = -\vec{r}_-$ e portanto $\vec{r}_+ = \frac{1}{2q}\vec{p}$ e $\vec{r}_- = -\frac{1}{2q}\vec{p}$. Assim

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_+|^3} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3} \right) \vec{r} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_+|^3} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3} \right) \vec{p} \quad (5.6)$$

Usando o ângulo θ entre \vec{r} e \vec{p} podemos ver que num sistema de coordenadas esféricas com eixo $\vec{e}_z \parallel \vec{p}$:

$$\vec{p} = qd(\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta); \quad (5.7)$$

Pode-se assim escrever uma aproximação deste campo quando a distância $r \gg \frac{p}{q}$ tendo em conta a expansão binomial dos denominadores $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_\pm|^3}$ da expressão (5.6) obtendo-se assim:

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \right) \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta) \quad (5.8)$$

Proposição 5.2.2 — Expansão de $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_\pm|^3}$

Recordando a expansão binomial

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!} \alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{1}{3!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 + O(x^4)$$

na vizinhança de $x = 0$ podemos calcular, com $\alpha = -\frac{3}{2}$ e usando

$$x = 2 \frac{\vec{r}_\pm \cdot \vec{r}}{r^2} = \pm \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{qr^2} \ll \pm 1$$

quando $r \gg \frac{p}{q}$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_\pm|^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - 2 \frac{\vec{r}_\pm \cdot \vec{r}}{r^2} + \left(\frac{r_\pm}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{r^3} \pm \frac{3}{2} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{qr^5} + O\left(\frac{1}{r^5}\right)$$

Desprezando os termos de ordem $\frac{1}{r^5}$ obtemos então

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_+|^3} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3} \approx \frac{3 \vec{p} \cdot \vec{r}}{qr^5} \quad ; \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_+|^3} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3} \approx \frac{2}{r^3}$$

Exercício 5.1 CAMPO DE UMA BARRA UNIFORMEMENTE CARREGADA .

Uma vareta de $L = 2\text{ m}$ de comprimento está uniformemente carregada com uma carga $Q = 16 \times 10^{-10}\text{ C}$. Calcule o campo elétrico \vec{E} num ponto P a uma distância $d = 1\text{ m}$ da barra e no plano ortogonal à barra passando pelo seu centro.

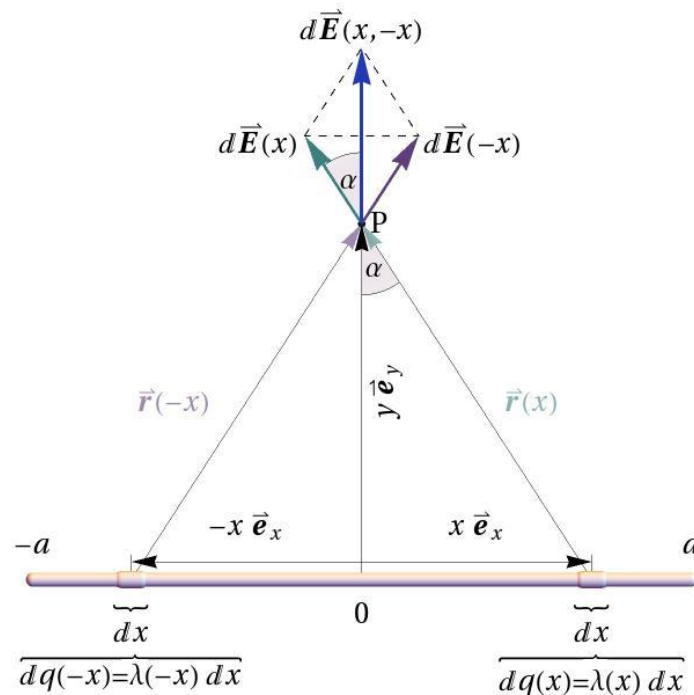
Resposta 5.1

Figura 5.4: Contribuições elementares para o campo elétrico duma barra finita de comprimento $L = 2a$ uniformemente carregada com carga Q .

Usando o referencial $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ com origem no centro da barra como indicado obtemos

$$\begin{cases} dq(x) = \lambda(x) dx & \lambda(\vec{r}_q) = \frac{Q}{2a} \\ \vec{r}_q = x\vec{e}_x & \vec{r}_P = y\vec{e}_y \\ \vec{r}(x) = y\vec{e}_y - x\vec{e}_x & r(x) = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Os campos infinitesimais em P devidos às cargas nos intervalos $[x, x + dx]$ e $[-x, -x + dx]$ são:

$$d\vec{E}_P(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(x)}{r(x)^2} \vec{u}_r(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y\vec{e}_y - x\vec{e}_x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dq(x)$$

$$d\vec{E}_P(-x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(-x)}{r(-x)^2} \vec{u}_r(-x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y\vec{e}_y + x\vec{e}_x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dq(-x)$$

Uma vez que $dq(-x) = dq(x) = \lambda dx$

$$d\vec{E}_P(x, -x) = d\vec{E}_P(x) + d\vec{E}_P(-x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda y \vec{e}_y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

O campo total obtém-se somando as contribuições de todos os segmentos da barra:

$$\vec{E}_P = \int_{\text{barra}} d\vec{E}_P(x) = \int_{x \geq 0} d\vec{E}_P(x, -x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{2\lambda y \vec{e}_y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

No caso presente

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{y(a^2 + y^2)^{1/2}} \vec{e}_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a}{y(a^2 + y^2)^{1/2}} \vec{e}_y = 10.16 \vec{e}_y \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

Calculando apenas a projeção em \vec{e}_z com $\cos(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x^2 + y^2} \cos(\alpha) dx &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y^2} \int_{-\alpha_{\max}}^{\alpha_{\max}} \cos^3(\alpha) d(y \tan(\alpha)) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \int_{-\alpha_{\max}}^{\alpha_{\max}} \cos(\alpha) d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} [\sin(\alpha)]_0^{\alpha_{\max}} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{y} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]_0^a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a\lambda}{y\sqrt{a^2 + y^2}} \quad (5.9) \end{aligned}$$

- Campo elétrico no limite dum ponto P a distância infinita (ou $y \gg 2a$):

$$\vec{E}_P = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{y^2 \left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right)^{1/2}} \right) \vec{e}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{y^2} \vec{e}_y \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

- Campo elétrico no limite duma barra infinita (ou $2a \gg y$):

$$\vec{E}_P = \lim_{2a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y \left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)^{1/2}} \right) \vec{e}_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \vec{e}_y \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

- Campo elétrico numa posição qualquer do espaço:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} \right) \vec{e}_x + \frac{1}{y} \left(\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} + \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} \right) \vec{e}_y \right)$$

5.3 Transformação do Campo Eletromagnético

Teorema 5.3.1 — Referencial S' deslocando-se com velocidade \vec{v} em S .

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) - \frac{(\gamma-1)}{v^2} (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B} \right) + \vec{E}_{\parallel}$$

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \right) - \frac{(\gamma-1)}{v^2} (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \right) + \vec{B}_{\parallel}$$

$$\vec{D}' = \gamma \left(\vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{H} \right) - \frac{(\gamma-1)}{v^2} (\vec{D} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \gamma \left(\vec{D}_{\perp} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{H} \right) + \vec{D}_{\parallel}$$

$$\vec{H}' = \gamma \left(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D} \right) - \frac{(\gamma-1)}{v^2} (\vec{H} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \gamma \left(\vec{H}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{D} \right) + \vec{H}_{\parallel}$$

$$\vec{J}' = \vec{J} - \gamma \rho \vec{v} + \frac{(\gamma-1)}{v^2} (\vec{J} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \gamma (\vec{J}_{\parallel} - \rho \vec{v}) + \vec{J}_{\perp}$$

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{1}{c^2} \vec{J} \cdot \vec{v} \right)$$

$$\vec{A}' = \vec{A} - \frac{\gamma}{c^2} \phi \vec{v} + \frac{(\gamma-1)}{v^2} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \gamma \left(\vec{A}_{\parallel} - \frac{1}{c^2} \phi \vec{v} \right) + \vec{A}_{\perp}$$

$$\phi' = \gamma \left(\phi - \vec{A} \cdot \vec{v} \right)$$

5.4 Linhas de Campo e Equipotenciais

5.4.1 Linhas de Campo de \vec{E}

Dado um campo vetorial $\vec{E}(\vec{r})$, uma curva $\vec{r}(s)$ é uma **linha de campo** se \vec{E} lhe for tangente em todos os pontos, i.e. se for solução de uma das equações

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{ou} \quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{E}(\vec{r})}{|\vec{E}(\vec{r})|}$$

Note que estas linhas não coincidem com as trajetórias de cargas unitárias aceleradas pelo campo \vec{E} . De facto as equações das trajetórias são de segunda ordem nas derivadas, i.e.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \kappa^2 \frac{q}{m} \vec{E}(\vec{r})$$

o que significa que as acelerações $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}$ são proporcionais ao campo mas as velocidades em geral não são. Além disso as trajetórias não dependem apenas do valor do campo em cada ponto, mas também da velocidade com que a partícula lá passa. Torna-se assim ambíguo representar o efeito do campo nas trajetórias de partículas teste. Pode-se dizer que as linhas de campo representam antes um modelo de linhas de corrente dum escoamento fluido.

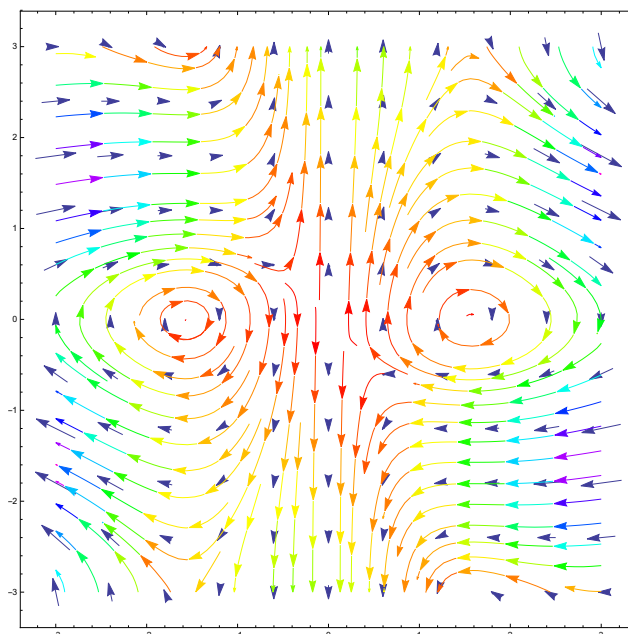


Figura 5.5: Linhas de um campo $\vec{A} = x^2 \sin(y) \vec{e}_x + (x+y) \cos(x) \vec{e}_y$

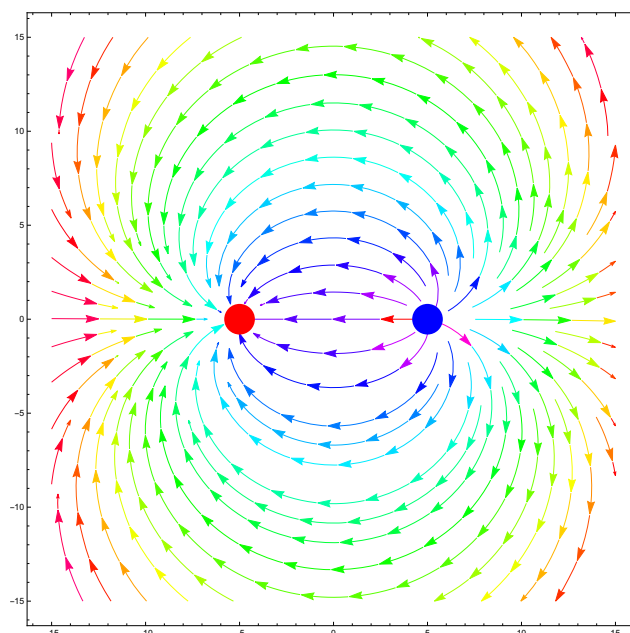


Figura 5.6: Linhas de campo de um dipolo elétrico, i.e. duas cargas iguais de sinais contrários (azul=positiva)

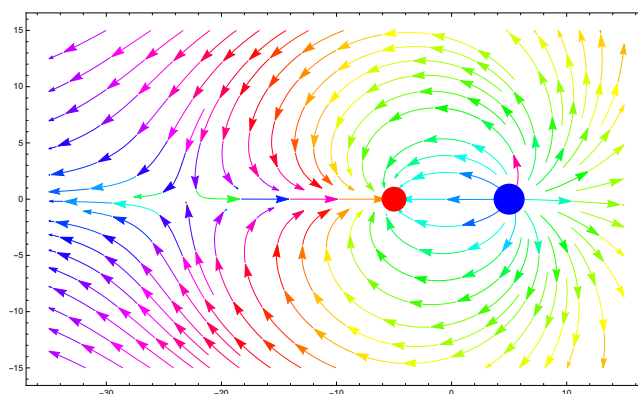


Figura 5.7: Linhas de campo de duas carga desiguais de sinais contrários. Note a existência de um ponto onde o campo se anula.

O campo eletrostático, sendo conservativo, deriva de um potencial $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$. Por esta razão o campo elétrico é sempre perpendicular às superfícies equipotenciais $V(\vec{r}) = c^{te}$ já que para um deslocamento $d\vec{r}$ que não saia desta equipotencial, $V(\vec{r} + d\vec{r}) = V(\vec{r})$, se tem $dV(\vec{r}) = \nabla V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ ou seja $\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ sobre a equipotencial. Sendo perpendicular à superfície, $\vec{E}(\vec{r})$ é também perpendicular a todas as curvas que passam por \vec{r} sobre a equipotencial. Assim, quando se realiza uma secção plana das superfícies equipotenciais as linhas que se obtêm são curvas equipotenciais perpendiculares a $\vec{E}(\vec{r})$ em cada ponto. Quando $\vec{E}(\vec{r})$ pertence ao plano da secção, então as suas linhas de campo podem-se representar no mesmo plano e formam um sistema de curvas ortogonais às curvas equipotenciais. Mas em geral o campo elétrico num qualquer plano não pertence a esse plano, embora continue a ser perpendicular as linhas equipotenciais nesse plano. Por definição, as **linhas de campo** de um campo vetorial $\vec{E}(\vec{r})$ constituem as "linhas de corrente" $\vec{r}(s)$ dum "campo de velocidades" paralelo a $\vec{E}(\vec{r})$, i.e. as curvas $\vec{r}(s)$ verificam $\frac{d\vec{r}(s)}{ds} \propto \vec{E}(\vec{r}(s))$. De facto apenas

interessa saber o campo de direções definido por $\vec{E}(\vec{r})$ por isso basta resolver o sistema de equações diferenciais $\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{\vec{E}(\vec{r}(s))}{|\vec{E}(\vec{r}(s))|}$ para obter linhas de campo. Este problema a três dimensões é em geral apenas resolúvel numericamente

Quando o campo numa secção plana se restringe a ela, a solução destas equações é equivalente à determinação de uma função escalar $\mathcal{F}(\vec{r})$ tal que as linhas iso- \mathcal{F} , i.e. as soluções de $\mathcal{F}(\vec{r}) = c^{te}$ para diversos valores de c^{te} , sejam precisamente as linhas de campo de \vec{E} . Em duas dimensões existe sempre uma tal função \mathcal{F} , e é tal que

$$d\mathcal{F} = \mathcal{U}(\vec{r}) \vec{n} \cdot (d\vec{r} \times \vec{E}(\vec{r})) = 0$$

ou seja existe sempre um **fator integrante** $\mathcal{U}(\vec{r})$ que torna exata a forma diferencial $\vec{n} \cdot (d\vec{r} \times \vec{E}(\vec{r}))$, onde \vec{n} representa a direção normal ao plano onde o campo é determinado.

Note que, se $\vec{E}(\vec{r})$ é ortogonal às superfícies equipotenciais $V(\vec{r}) = c^{te}$, a forma $d\vec{r} \times \vec{E}(\vec{r})$ é sempre tangente a estas superfícies para qualquer $d\vec{r}$ (porque o plano ortogonal a $\vec{E}(\vec{r})$ o é e $d\vec{r} \times \vec{E}(\vec{r})$ pertence a esse plano), bem como $\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{n}$. Além disso \vec{n} também pertence ao plano tangente referido. Mas para um deslocamento $\vec{r}_{\mathcal{F}} \rightarrow \vec{r}_{\mathcal{F}} + d\vec{r}_{\mathcal{F}}$ mantendo $\mathcal{F}(\vec{r}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}(\vec{r}_{\mathcal{F}} + d\vec{r}_{\mathcal{F}}) = c^{te}$ (i.e. um deslocamento sobre uma linha iso- \mathcal{F}) conclui-se que

$$d\mathcal{F}(\vec{r}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{U}(\vec{r}_{\mathcal{F}}) \vec{n} \cdot (d\vec{r}_{\mathcal{F}} \times \vec{E}(\vec{r}_{\mathcal{F}})) = d\vec{r}_{\mathcal{F}} \cdot (\mathcal{U}(\vec{r}_{\mathcal{F}}) \vec{E}(\vec{r}_{\mathcal{F}}) \times \vec{n}) = 0$$

i.e. $\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{n}$ é também ortogonal às linhas $\mathcal{F} = c^{te}$, logo $\vec{E}(\vec{r})$ deve ser tangente a estas, que coincidem assim com as linhas de campo de $\vec{E}(\vec{r})$ no plano referido.

No caso de campos planos com evidente simetria é possível encontrar uma expressão para o fator integrante $\mathcal{U}(\vec{r})$, mas em geral isso não é possível. A condição para a existência de um fator integrante numa forma diferencial não-exata $\vec{\omega}$ é que

$$\vec{\omega} \times d\vec{\omega} = 0$$

o que acontece certamente para dimensão 2, já que o espaço das 3-formas $\Lambda^3(\mathbb{R}^2) \equiv 0$.

5.4.2 Campos Planos com Simetria de Translação

Obtemos campos deste tipo quando consideramos linhas paralelas e infinitas de cargas, ou linhas e segmentos planos carregados perpendiculares ao mesmo plano. Os casos de campos planos com simetria de translação na direção ortogonal a um plano escolhido como xOy são particularmente fáceis de calcular, porque os potenciais $V(\vec{r}) = V(x, y)$ não devem depender da coordenada z . A equação de Poisson no espaço livre reduz-se à equação de Laplace $\nabla^2 V = 0$. Em duas dimensões e no espaço livre as soluções da equação

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \partial_{xx}^2 V(x, y) + \partial_{yy}^2 V(x, y) = 0$$

são **funções harmónicas** no plano complexo. Isto significa que, pondo $\mathfrak{z} = x + iy$, o potencial $V(x, y) = V(\mathfrak{z})$ é a parte real (ou imaginária) de uma **função analítica** $f(\mathfrak{z}) = V(\mathfrak{z}) + iU(\mathfrak{z})$ no plano complexo \mathbb{C} , o que entre outras coisas implica que $dp\bar{\mathfrak{z}}f = 0$, ou seja f não depende de $\bar{\mathfrak{z}} = x - iy$. Dito doutra maneira, $f(\mathfrak{z}) = f(x, y)$ apenas depende de x, y na combinação $\mathfrak{z} = x + iy$. Mas então $U(x, y) = U(\mathfrak{z})$ é a **função conjugada** de $V(x, y)$, e as curvas de nível $U(x, y) = c_1^{te}$ são necessariamente ortogonais às curvas equipotenciais $V(x, y) = c_2^{te}$, ou seja são as linhas de campo associadas a $\vec{E} = -\nabla V$.

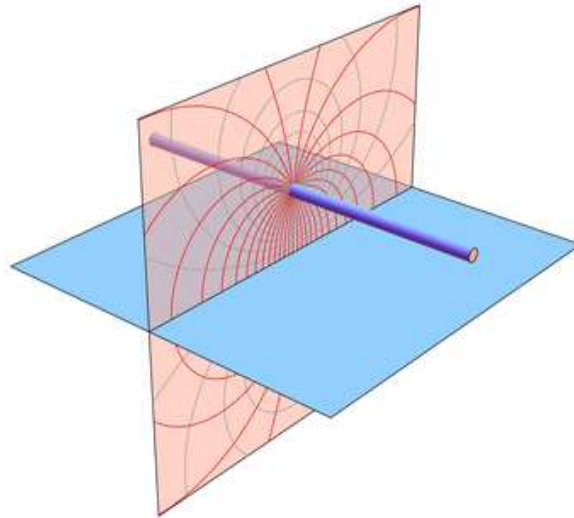


Figura 5.8: Campo de um condutor cilíndrico uniformemente carregado em cima de um plano condutor neutro (azul). O campo tem simetria de translação e o seu potencial é harmónico no plano perpendicular aos condutores. As linhas equipotenciais (cinzento) e as linhas de campo (vermelho) podem ser determinadas respetivamente como as linhas de nível da parte real e imaginária duma função harmónica complexa $f(z) = \tan^{-1}(z)$, ou seja $V(x, y) = \text{Re}(\tan^{-1}(x + iy))$ e $U(x, y) = \text{Im}(\tan^{-1}(x + iy))$. Note-se que a densidade superficial de carga induzida no plano condutor é $\sigma_{\pm} = \epsilon_0 E_{\pm}$ sendo igual e de polaridade oposta em cada face do plano condutor .

Se escrevermos os sistema de equações destas linhas obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = E_x \\ \frac{dy}{dt} = E_y \end{cases} \iff \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = dt$$

Podemos então concluir que ao longo de uma linha de campo se tem $\mathcal{M}dx + \mathcal{N}dy = E_y dx - E_x dy = 0$. Esta forma de Pfaff é exata SSE $\partial_y \mathcal{M} - \partial_x \mathcal{N} = 0$, o que é verdade no caso que referimos já que

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

Existe portanto sempre uma função $\mathcal{F}(x, y) = U(x, y)$ tal que $d\mathcal{F} = \mathcal{M}dx + \mathcal{N}dy$

$$\begin{cases} \mathcal{M} = E_y = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \\ \mathcal{N} = -E_x = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \end{cases} \iff E_y dx - E_x dy = d\mathcal{F} = 0$$

As linhas do campo $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$ são assim as linhas de nível de $\mathcal{F}(x, y)$.

A partir de $\mathcal{M}(x, y) = \frac{\partial \mathcal{F}(x, y)}{\partial x}$ podemos deduzir em geral que

$$\mathcal{F}(x, y) = \int_{x_0}^x \mathcal{M}(x', y) dx' + \phi(y)$$

onde $\phi(y)$ pode ser determinada a partir da equação $\mathcal{N}(x, y) = \frac{\partial \mathcal{F}(x, y)}{\partial y}$, que agora se escreve

$$\mathcal{N}(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial \mathcal{M}(x', y)}{\partial y} dx' + \frac{d\phi(y)}{dy} \implies \phi(y) = \int_{y_0}^y \mathcal{N}(x, y') dy' - \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \frac{\partial \mathcal{M}(x', y')}{\partial y'} dx' dy'$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, y) &= \int_{x_0}^x \mathcal{M}(x', y) dx' + \int_{y_0}^y \mathcal{N}(x, y') dy' - \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \frac{\partial \mathcal{M}(x', y')}{\partial y'} dx' dy' = \\ &= \int_{x_0}^x \left(\mathcal{M}(x', y) - \int_{y_0}^y \frac{\partial \mathcal{M}(x', y')}{\partial y'} dy' \right) dx' + \int_{y_0}^y \mathcal{N}(x, y') dy' \end{aligned}$$

ou seja, em geral a menos de uma constante, obtém-se uma forma exata $d\mathcal{F} = \mathcal{M}dx + \mathcal{N}dy$

$$\mathcal{F}(x, y) = \int_{x_0}^x \mathcal{M}(x', y_0) dx' + \int_{y_0}^y \mathcal{N}(x, y') dy'$$

em que assumimos $\mathcal{F}(x_0, y_0) = 0$.² Se $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ designar um caminho entre $\vec{r}_0 = \gamma(0)$ e $\vec{r} = \gamma(1)$ então

$$\mathcal{F}(x, y) = \int_{\gamma} (\mathcal{M}(\vec{r}') \vec{e}_x + \mathcal{N}(\vec{r}') \vec{e}_y) \cdot d\vec{r}'$$

5.4.3 Campos planos com Simetria Axial de Rotação

Nos exemplos da alínea anterior, para realizar o mapa de linhas de campo é necessário encontrar um par de funções conjugadas (ϕ, ψ) que verificam $\partial_x \phi = \partial_y \psi$ e $\partial_y \phi = -\partial_x \psi$. Contudo, nem sempre existem, i.e. apenas no caso em que o campo tem simetria de translação se pode esperar que $\nabla^2 \phi = 0$ seja equivalente a $\partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi = 0$ porque $\phi(\vec{r}) = \phi(x, y)$. Noutros casos, a restrição a duas coordenadas do laplaciano $\nabla^2 \phi$ não se anula necessariamente porque por exemplo

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \neq 0$$

Em alguns casos importantes (por exemplo quando a distribuição de cargas tem uma simetria axial) basta calcular o campo num plano passando pelo eixo de simetria para obter o campo em todo o espaço por rotação desse campo plano em torno do eixo de simetria. Este é certamente o caso

² Note-se que

$$\int_{y_0}^y \frac{\partial \mathcal{M}(x', y')}{\partial y'} dy' = \mathcal{M}(x', y) - \mathcal{M}(x', y_0)$$

e que de facto

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial \mathcal{F}(x', y_0)}{\partial x'} dx' + \int_{y_0}^y \frac{\partial \mathcal{F}(x, y')}{\partial y'} dy' = \int_{x_0, y_0}^{x, y} d\mathcal{F}(x', y') = \mathcal{F}(x, y) - \mathcal{F}(x_0, y_0)$$

do campo gerado por quaisquer duas cargas pontuais, ou por uma distribuição discreta de cargas sobre uma reta. Infelizmente, embora como no caso anterior o potencial restrito a um plano axial se possa escrever apenas em termos de duas coordenadas, essas coordenadas fazem parte dum sistema curvilíneo em que a terceira será o ângulo de rotação φ em torno do eixo de simetria. Assim já não é verdade que o potencial seja uma função harmónica no plano porque a restrição a essas duas coordenadas da equação 3-dimensional $\nabla^2 V = 0$ já não é uma equação de Laplace no plano.

Por exemplo, se usarmos um referencial adaptado alinhando a direção de simetria com \vec{e}_z , então um sistema de coordenadas esféricas $\{r, \theta, \varphi\}$ permite descrever o campo no semiplano $\varphi = 0$, $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, \pi]$. Neste caso $V(\vec{r}) = V(r, \theta)$ mas o laplaciano escreve-se

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

Mesmo que usássemos um sistema coordenado que fosse cartesiano quando restrito ao plano teríamos um resultado idêntico. Por exemplo, um sistema de coordenadas cilíndricas $\{\rho, \varphi, z\}$ é 'cartesiano' quando restrito ao semiplano $\varphi = 0$, $\rho \in [0, +\infty[$, $z \in]-\infty, +\infty[$. Contudo, a restrição do laplaciano de $V(\vec{r}) = V(\rho, z)$ a este semiplano dá

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

e $V(\rho, z)$ não é portanto em geral uma função harmónica nas duas variáveis ρ, z .

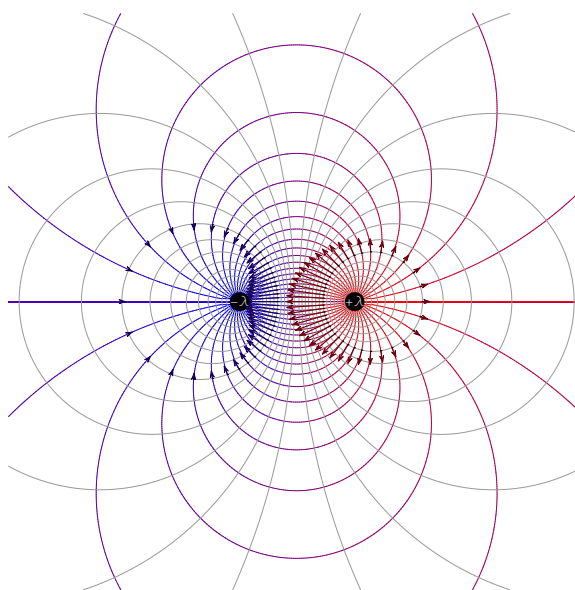


Figura 5.9: Dipolo cilíndrico

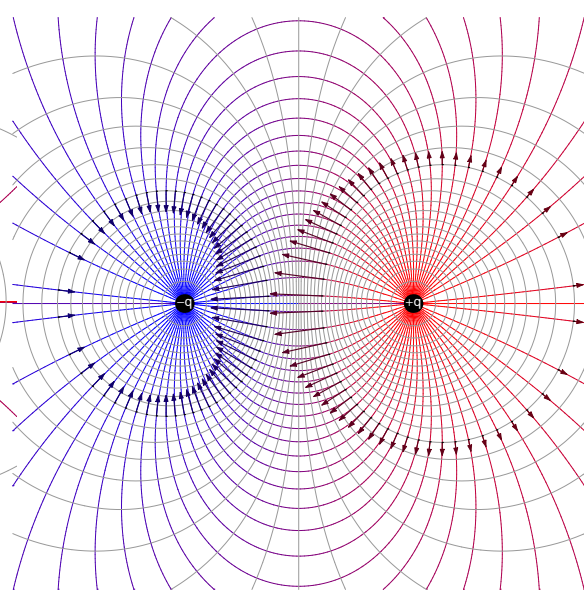
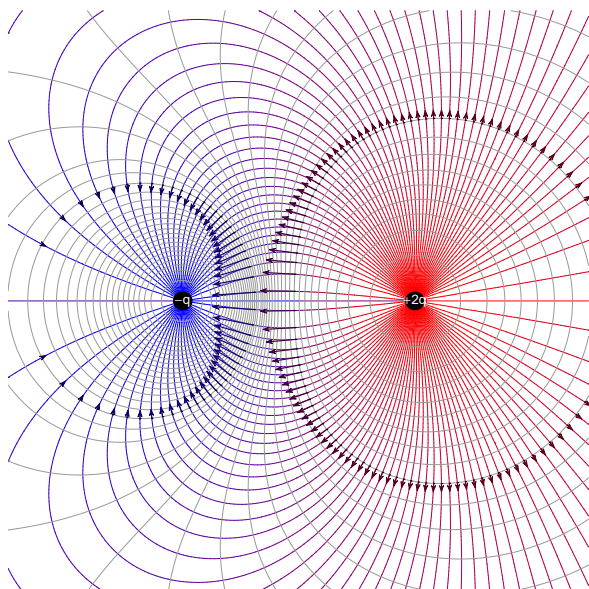
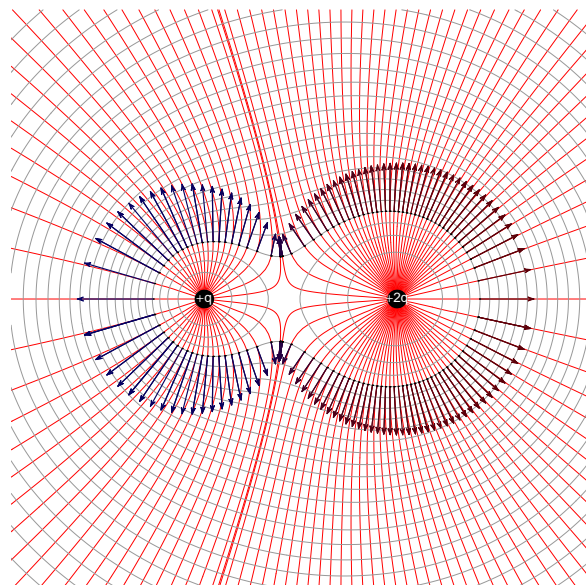


Figura 5.10: Dipolo pontual

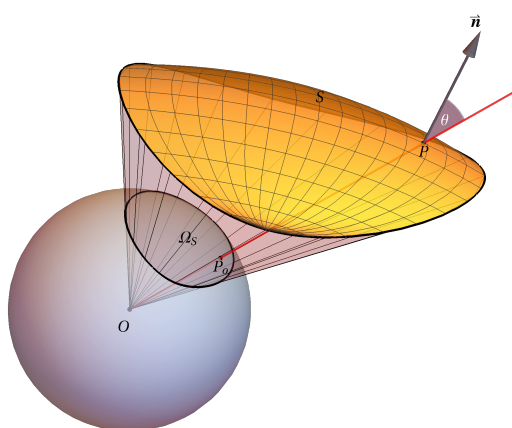
Figura 5.11: Duas cargas $-q$ e $+2q$ Figura 5.12: Duas cargas $+q$ e $+2q$

5.5 Lei de Gauss

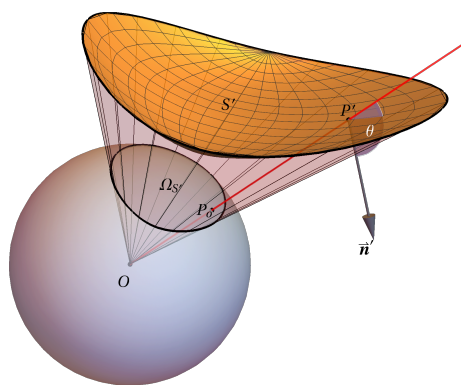
Definição 5.5.1 — ÂNGULO SÓLIDO.

O **Ângulo Sólido** Ω que subtende um objeto visto de uma origem O é a razão entre a **área da secção**, e o **quadrado do raio**, duma superfície esférica unitária com origem em O , secção essa formada pela intersecção da superfície esférica com o cone de vértice em O que circunscreve o objeto.^c

^c O ângulo sólido é um número adimensional designado de *esteradiano*, à semelhança do *radiano* que é a razão entre os comprimentos do arco e do raio do respetivo círculo.



(a) Ângulo Sólido positivo



(b) Ângulo Sólido negativo

Figura 5.13: Definição de Ângulo Sólido Ω_S para a superfície S vista de O .

Há um número infinito de superfícies que, quando vistas duma mesma origem O , são circunscritas pelo mesmo cone com vértice em O , por isso todas subtendem o mesmo ângulo sólido Ω . Contudo,

dependendo da orientação da superfície (i.e. a escolha do lado da superfície cuja normal aponta para 'fora'), em cada ponto \vec{r}_p duma superfície o elemento de área pode contribuir positivamente (se $\vec{r}_p \cdot d\vec{S} > 0$) ou negativamente (se $\vec{r}_p \cdot d\vec{S} < 0$) para o respetivo ângulo sólido, por isso podemos ter ângulos sólidos com o mesmo valor absoluto mas sinais contrários como ilustrado na Figura (5.13). É possível ver desde logo que:

- O ângulo sólido de um plano infinito, visto de qualquer ponto do espaço, é $\Omega = \pm 2\pi$, o sinal dependendo da escolha do lado do plano com a normal para fora.³
- O ângulo sólido de uma superfície fechada, quando vista de um ponto dentro do volume que a superfície delimita, é $\Omega = 4\pi$.⁴
- O ângulo sólido de uma superfície fechada, quando vista de um ponto fora do volume que a superfície delimita, é $\Omega = 0$.⁵
- O ângulo sólido de qualquer objeto, quando visto de um ponto na sua superfície, é $\Omega = 2\pi$.⁶

Quando visto da origem, um elemento de área $d\vec{S}(\vec{r}_1)$ na posição \vec{r}_1 pode ser comparado com o elemento de área $d\vec{\Omega}(\vec{r}_2)$ de uma superfície esférica de raio r_2 , centrada na origem, e que subtende o mesmo ângulo sólido (ver Fig. 5.14-(a)). A projeção $\vec{e}_r \cdot d\vec{S}(\vec{r}_1)$ na direção radial e a área $d\Omega(\vec{r}_2)$ podem ser vistas como partes iguais das respetivas superfícies esféricas de raios r_1 e r_2 . Devemos assim obter uma proporção entre as áreas de $d\Omega(\vec{r}_2) = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \vec{e}_r \cdot d\vec{S}(\vec{r}_1)$ (Fig. 5.14-(a)). Quando $r_2 = 1$ a área $d\Omega(\vec{r}_2)$ é a medida do ângulo sólido que subtende $d\vec{S}(\vec{r}_1)$.

$$d\Omega(\vec{r}) = \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{r^2} \text{ (visto da origem) ou } d\Omega(\vec{r}, \vec{r}_o) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o) \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_o|^3} \text{ (visto de } \vec{r}_o)$$

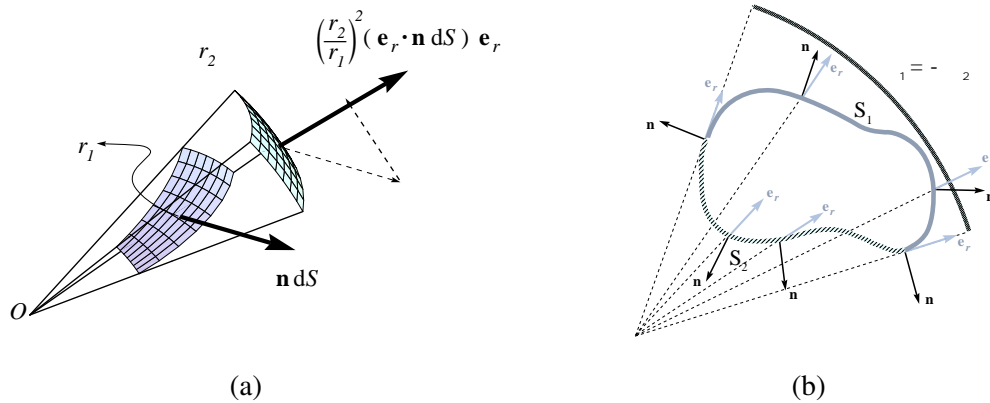


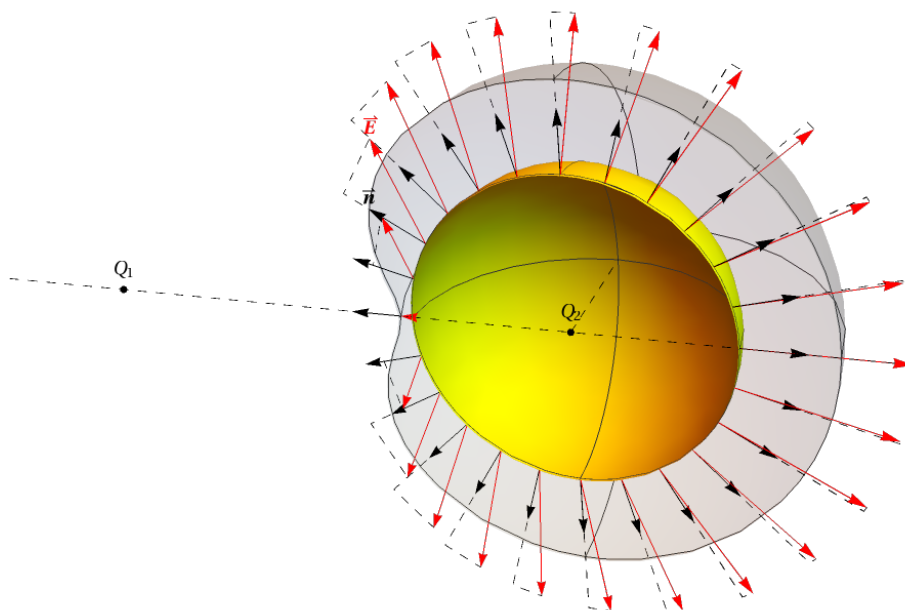
Figura 5.14: (a) Definição de Ângulo Sólido de dS visto de O , e (b) o ângulo sólido para uma superfície fechada vista de fora é sempre nulo porque $\Omega_1 = -\Omega_2$ para as duas partes S_1 e S_2 que compõem a superfície.

³ Para uma superfície como o plano infinito, o ângulo sólido a partir de qualquer ponto exterior é $\Omega = 2\pi$ porque o plano pode ser visto sob o mesmo ângulo que uma meia esfera a partir do seu centro.
⁴ Para qualquer superfície fechada, o ângulo sólido quando visualizada de um ponto interior é $\Omega = 4\pi$, que é a superfície de uma esfera de raio unidade.
⁵ Quando visualizada do exterior, o ângulo sólido de uma superfície fechada é sempre $\Omega = 0$, como a Figura 5.14-(b) mostra.
⁶ Assumindo que a superfície do objeto é regular, no limite em que é visto de um ponto que se aproxima da superfície desde o interior, qualquer elemento de área dessa superfície se parece com um plano infinito.

5.5.1 Forma integral da Lei de Gauss:

A Lei de Coulomb (expressando a dependência do campo elétrico do inverso quadrado da distância às cargas) relaciona-se geometricamente com a definição de ângulo sólido Ω : de facto, o fluxo $d\Phi(\vec{r}, \vec{r}_q) = \vec{E}(\vec{r}, \vec{r}_q) \cdot d\vec{S}(\vec{r})$ do campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}_q)$, gerado em \vec{r} por cargas em \vec{r}_q , através de uma superfície elementar orientada $d\vec{S}(\vec{r})$ em \vec{r} , é simplesmente proporcional ao ângulo sólido $d\Omega(\vec{r}, \vec{r}_q)$ que $d\vec{S}(\vec{r})$ subtende quando visto de \vec{r}_q , e à carga $q(\vec{r}_q)$ que origina o campo.

A afirmação da Lei de Gauss é que o fluxo deste campo $\vec{E}(\vec{r})$ através de uma superfície **fechada** S apenas depende das cargas que estão dentro do volume V_S delimitado por S , uma vez que o ângulo sólido de uma superfície fechada vista de um ponto interior qualquer é 4π , e vista de um ponto exterior qualquer é 0.



Fluxo Φ_e (cinzento) através de uma superfície de Gauss esférica (amarelo) do campo elétrico \vec{E} devido a duas cargas Q_1, Q_2 , onde Q_1 está do lado de fora e $Q_2 > Q_1$ no centro da esfera.

Figura 5.15: Lei de Gauss

Definição 5.5.2 — LEI DE GAUSS (FORMA INTEGRAL).

O fluxo $\Phi_e(S)$ do campo elétrico \vec{E} através duma **superfície fechada** S é proporcional à carga total $Q_{int}(S)$ existente **no interior** do volume V delimitado pela superfície $S = \partial V$.

$$\Phi_e(S) = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0}$$

Demonstração 5.5.1

Para uma distribuição volúmica de carga $\rho(\vec{r}_c)$ em todo o espaço V , o campo total em qualquer ponto \vec{r} é, de acordo com o princípio de sobreposição e a Lei de Coulomb, a soma das contribuições

$$d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}_c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3} (\vec{r} - \vec{r}_c)$$

devidas a todas as cargas $dq(\vec{r}_c) = \rho(\vec{r}_c) dV(\vec{r}_c)$ localizadas em \vec{r}_c :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_c d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}_c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3} (\vec{r} - \vec{r}_c) dV(\vec{r}_c)$$

Agora, dada uma superfície fechada S qualquer, o fluxo de \vec{E} através de S é

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \oiint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r}) = \oiint_S \left(\int_c d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}_c) \right) \cdot d\vec{S}(\vec{r}) = \int_c \left(\oiint_S d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}_c) \cdot d\vec{S}(\vec{r}) \right) \equiv \\ &= \int_c d\Phi_S(\vec{r}_c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}_c) \left(\oiint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c) \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3} \right) dV(\vec{r}_c) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}_c) \left(\oiint_S d\Omega(\vec{r}, \vec{r}_c) \right) dV(\vec{r}_c) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_S} \rho(\vec{r}_c) dV(\vec{r}_c) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

onde V_S é o volume cuja fronteira é $\partial V_S \equiv S$ e Q_{int} a carga contida em V_S . Note-se que $\Omega_S(\vec{r}_c) = \oiint_S d\Omega(\vec{r}, \vec{r}_c) = 0$ se \vec{r}_c estiver fora do volume delimitado por S , e vale $\Omega_S(\vec{r}_c) = 4\pi$ se \vec{r}_c estiver dentro de S .

5.5.2 Forma Local da Lei de Gauss: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

De acordo com o **teorema de Green** (ou teorema do **Fluxo-Divergência**), para qualquer campo vetorial $\vec{A}(\vec{r})$ e qualquer volume V , denotando por ∂V a superfície fronteira que delimita o volume V tem-se

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) dV(\vec{r}) = \oiint_{\partial V} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})$$

Pela Lei de Gauss, o fluxo de \vec{E} através de uma superfície fechada ∂V é proporcional à carga Q_{int} no interior do volume V delimitado por essa superfície. Se ρ designar a densidade de carga, então

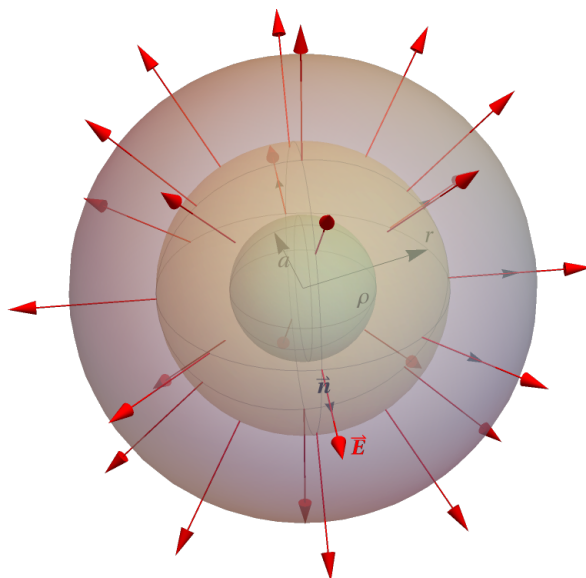


Figura 5.16: Superfície de Gauss Esférica (amarela) e Fluxo (cinzento)

$$R \rightarrow r \left(1 + \frac{3E}{r}\right)^{1/3}$$

$Q_{int} = \iiint_V \rho dV$ pelo que

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \iff \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Para que esta equação seja válida qualquer que seja o volume V deve-se ter igualdade entre os integrandos

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esta **Equação de Poisson** é a expressão local da Lei de Gauss. Note-se que esta expressão mantém-se válida mesmo na presença de matéria: o campo \vec{E} é um campo microscópico.

5.5.3 Lei de Gauss: Aplicações

Em situações de simetria elevada é possível usar a Lei de Gauss para determinar a forma do campo elétrico a partir do conhecimento da distribuição de cargas. Em particular quando o campo é invariante para rotações em torno de um ponto (simetria esférica), em torno de um eixo (simetria cilíndrica) ou para translações (simetria plana) existem superfícies especiais (respetivamente as fronteiras de esferas, cilindros e paralelepípedo) para as quais o fluxo do campo é o produto duma área pelo valor constante da componente normal do campo sobre essa superfície.

- **Esfera uniformemente carregada:**

No caso de uma esfera de raio R carregada com uma distribuição de carga uniforme, $\rho \left(\frac{C}{m^3}\right)$, o campo $\vec{E}(\vec{r})$ é invariante para rotações em torno da origem (se a distribuição de cargas não muda, o campo também não). Além disso o campo deve ser radial $\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r$ porque em particular, fixando \vec{r}_o , rotações em torno do eixo $\vec{e}_r(\theta_o, \varphi_o)$ devem deixar $\vec{E}(\vec{r}_o)$ invariante. Consequentemente a componente radial do campo $E_r(r) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})$ apenas depende de r ,

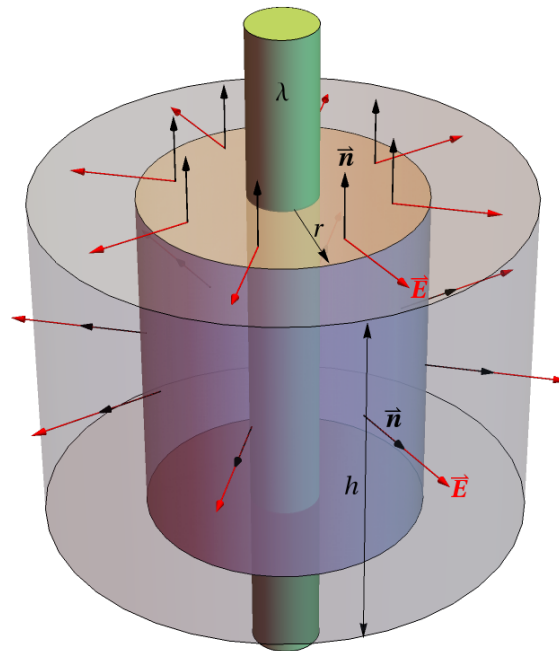


Figura 5.17: Superfície de Gauss Cilíndrica (amarela) e Fluxo (cinzento) $R \rightarrow r\sqrt{1 + \frac{2E}{r}}$

onde $\vec{n}(\vec{r}) = \vec{e}_r$ é a normal a S_r em \vec{r} . O seu fluxo através de uma superfície esférica de raio r é $\Phi_{S_r} = 4\pi r^2 E_r(r)$.

$$\Phi_{S_r} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{int}(r)}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & (r > R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} & (r < R) \end{cases}$$

- **Linha infinita de carga uniformemente distribuída:**

Uma linha infinita de cargas uniformemente distribuídas com densidade $\lambda \left(\frac{C}{m}\right)$ deve dar origem a um campo $\vec{E}(\vec{r})$ invariante para rotações com eixo \vec{e}_z coincidente com a linha. Além disso translações na direção da linha e reflexões em planos perpendiculares à linha também devem deixar o campo invariante. Isto implica que o campo deve apenas ter uma componente cilíndrica $\vec{E}(\vec{r}) = E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho$. O fluxo através de um cilindro de raio ρ e altura h , coaxial com a linha de cargas, deve ser:

$$\Phi_S(\rho) = 2\pi\rho h E_\rho(\rho) = \frac{Q_{int}(h)}{\epsilon_0} = \lambda h \quad \therefore \quad E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

- **Plano infinito de carga uniformemente distribuída:**

Para um plano horizontal de cargas uniformemente distribuídas com densidade $\sigma \left(\frac{C}{m^2}\right)$ o campo $\vec{E}(\vec{r})$ deve ser invariante para translações horizontais arbitrárias. Além disso deve ser (anti-) simétrico em relação ao plano de cargas, e deve ser vertical $\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z) \vec{e}_z$ por simetria de rotação em torno de qualquer eixo vertical. O fluxo através de qualquer caixa de

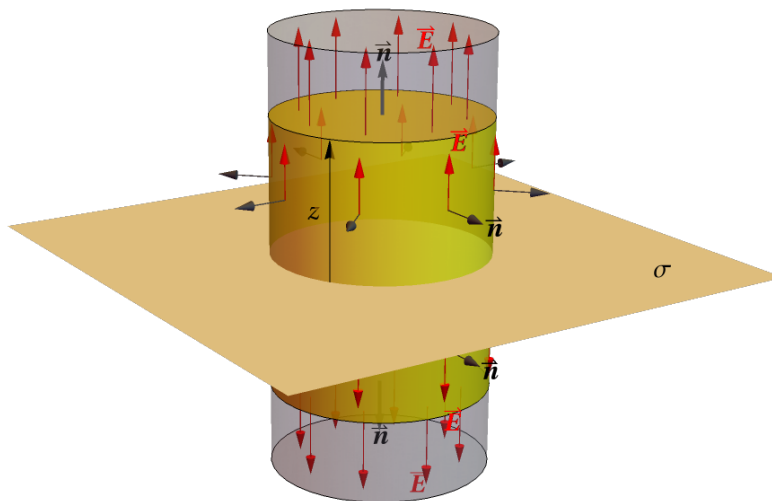


Figura 5.18: Superfície de Gauss Cilíndrica (amarela) e Fluxo (cinzento)

lados verticais e bases horizontais com área ΔS , às cotas z e $-z$, é então

$$\Phi_S(z) = \vec{E}(z) \cdot \Delta \vec{S}(z) + \vec{E}(-z) \cdot \Delta \vec{S}(-z) = 2E_z(z)\delta S$$

já que $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$ e $\Delta \vec{S}(-z) = -\Delta \vec{S}(z) = \Delta S \vec{e}_z$. Assim, da Lei de Gauss conclui-se que

$$2E_z(z)\Delta S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad E_z(z) = \text{sgn}(z) \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(Note-se que neste caso o campo $\vec{E} = E_z(z) \vec{e}_z$ apenas depende do sinal de z , sendo de facto constante em cada lado do plano de cargas.)

5.6 Condutores: Propriedades Eletrostáticas

Um condutor sujeito a um campo exterior \vec{E}_e movimenta cargas que vão criar um campo adicional \vec{E}_i até que, no seu interior, $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_i = 0$. Mas então $\rho(\vec{r}) \equiv 0$ dentro do condutor porque qualquer $\Phi_S \equiv \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$ quando S está dentro do condutor. Significa isto que todas as cargas que criam \vec{E}_i se encontram à superfície. Se $\sigma(\vec{r}_s)$ designar a Densidade Superficial de carga, a componente normal do campo à superfície do condutor $\vec{E}(\vec{r}_s) \cdot \vec{n}_s = E_n(\vec{r}_s)$ deve ser tal que o seu fluxo numa caixa com

bases $d\vec{S}$ paralelas, de cada lado da superfície, e altura δh infinitesimal verifica

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \vec{E}(\vec{r}_s + \delta h \vec{n}_s) \cdot d\vec{S}(\vec{r}_s + \delta h \vec{n}_s) + \vec{E}(\vec{r}_s - \delta h \vec{n}_s) \cdot d\vec{S}(\vec{r}_s - \delta h \vec{n}_s) + o(\delta h) = \\ &= E_n(\vec{r}_s + \delta h \vec{n}_s) dS(\vec{r}_s + \delta h \vec{n}_s) + o(\delta h) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma(\vec{r}_s) dS(\vec{r}_s)}{\epsilon_0} \\ \therefore \quad \lim_{\delta h \rightarrow 0} E_n(\vec{r}_s + \delta h \vec{n}_s) dS(\vec{r}_s + \delta h \vec{n}_s) + o(\delta h) &= E_n(\vec{r}_s) dS(\vec{r}_s) = \frac{\sigma(\vec{r}_s) dS(\vec{r}_s)}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

i.e. $E_n(\vec{r}_s) = \frac{\sigma(\vec{r}_s)}{\epsilon_0}$ à superfície. O campo à superfície não pode ter componente tangencial numa situação eletrostática, $E_t(\vec{r}_s) = 0$ senão existiria uma aceleração de cargas livres à superfície, logo correntes superficiais, e portanto o campo à superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático é sempre normal à superfície:

$$\vec{E}(\vec{r}_s) = \frac{\sigma(\vec{r}_s)}{\epsilon_0} \vec{n}_s$$

Reciprocamente, se conhecermos o campo $\vec{E}(\vec{r}_s)$ na superfície dum condutor, podemos deduzir a distribuição de carga superficial

$$\sigma(\vec{r}_s) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}_s) \cdot \vec{n}_s$$

5.6.1 Pressão Electrostática na superfície de um condutor.

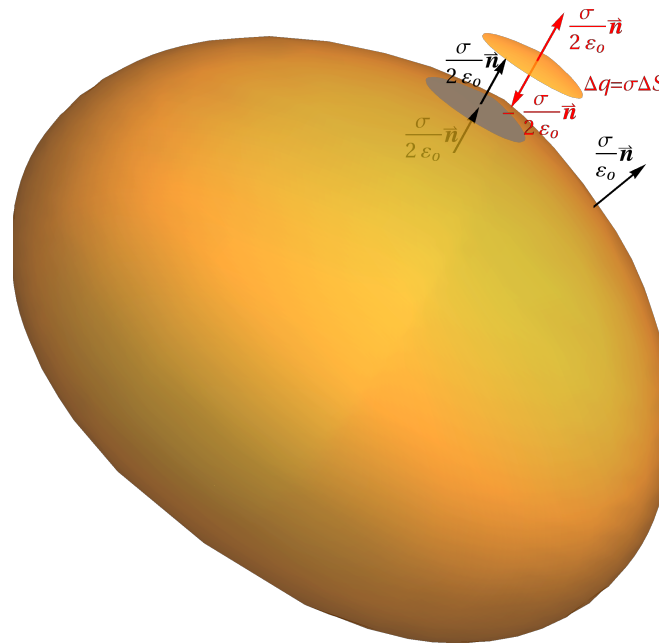


Figura 5.19: Campo à superfície de um condutor carregado em equilíbrio eletrostático usando o princípio de sobreposição.

O campo à superfície dum condutor pode ser visto como a sobreposição $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ do campo \vec{E}_1 dum disco carregado plano de área infinitesimal $d\vec{S}$, e do campo \vec{E}_2 do resto da distribuição

superficial de carga em $S - dS$. Considerando o campo gerado por toda a carga em $d\vec{S}$ (se necessário usando a Lei de Gauss numa caixa elementar com bases paralelas a $d\vec{S}$ e altura $\delta h \ll \sqrt{dS}$) obtém-se

$$\vec{E}_1(\vec{r} \pm \delta h \vec{n}) \approx \pm \frac{\sigma(\vec{r})}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

onde \vec{n} representa a direção normal para o exterior à superfície do condutor. O campo \vec{E}_2 devido ao restante das cargas superficiais deve então verificar

$$\vec{E}_2(\vec{r} \pm \delta h \vec{n}) \approx \frac{\sigma(\vec{r})}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

de forma a que se possa ter

$$\vec{E}(\vec{r} - \delta h \vec{n}) = 0 \quad \text{e também} \quad \vec{E}(\vec{r} + \delta h \vec{n}) \approx \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0} \vec{n}$$

conforme o esperado para o comportamento do campo eletrostático dentro e à superfície dum condutor.

Esta decomposição permite calcular a força sentida pela carga $dq(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) dS(\vec{r})$ no disco, causada pelo campo $\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{2\epsilon_0} \vec{n}$ das restantes cargas, i.e.

$$d\vec{F}(\vec{r}) = dq(\vec{r}) \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})^2}{2\epsilon_0} dS(\vec{r}) \vec{n} \quad \therefore \quad \frac{d\vec{F}(\vec{r})}{dS} \equiv \vec{P}_e(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})^2}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

onde a força por unidade de área é a pressão eletrostática à superfície do condutor. Note-se que esta pressão é sempre positiva.

5.7 O potencial escalar V do campo eletrostático $\vec{E} = -\nabla V$

5.7.1 Apêndice Matemático: Operador Gradiente:

O gradiente de uma função escalar $f(\vec{r}) \in C_R^1$ é um campo vetorial (convenção da soma em índices repetidos)

$$\nabla f(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_k} \frac{\partial f}{\partial x^k} \vec{e}_k$$

como pode ser deduzido em consequência da identidade

$$df(\vec{r}) \equiv d\vec{r} \cdot \nabla f(\vec{r})$$

sendo $d\vec{r}$ o elemento de linha (deslocamento elementar) no sistema de coordenadas ortogonais $\{x^k\}$

$$d\vec{r} = \eta_k dx^k \vec{e}_k \quad \text{com funções de escala} \quad \eta_k = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} \right|$$

Coordenadas	Posição	Funções Escala	Gradiente
Cartesianas [x, y, z]	$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$	$\eta_1 = 1, \eta_2 = 1, \eta_3 = 1$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
Cilíndricas [ρ, ϕ, z]	$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho(\phi) + z \vec{e}_z$	$\eta_1 = 1, \eta_2 = \rho, \eta_3 = 1$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
Esféricas [r, θ, φ]	$\vec{r} = r \vec{e}_r(\theta, \varphi)$	$\eta_1 = 1, \eta_2 = r, \eta_3 = r \sin(\theta)$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

5.7.2 Apêndice Matemático: Operador Rotacional:

5.7.2.1 Em Coordenadas Cartesianas

- Rotacional de campo de vetores $\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r}) \vec{e}_x + E_y(\vec{r}) \vec{e}_y + E_z(\vec{r}) \vec{e}_z$

$$\nabla \times \vec{E} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

5.7.2.2 Em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

- Deslocamento $|d\vec{r}|^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} \right|^2 (dx^k)^2 = \eta_k^2 (dx^k)^2 \quad \left(\eta_k = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} \right| \right)$
- Rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = & \frac{1}{\eta_2 \eta_3} \left(\frac{\partial(\eta_3 A_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(\eta_2 A_2)}{\partial x^3} \right) \vec{e}_1 + \\ & + \frac{1}{\eta_1 \eta_3} \left(\frac{\partial(\eta_1 A_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(\eta_3 A_3)}{\partial x^1} \right) \vec{e}_2 + \\ & + \frac{1}{\eta_1 \eta_2} \left(\frac{\partial(\eta_2 A_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(\eta_1 A_1)}{\partial x^2} \right) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \det \begin{vmatrix} \eta_1 \vec{e}_1 & \eta_2 \vec{e}_2 & \eta_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \eta_1 A_1 & \eta_2 A_2 & \eta_3 A_3 \end{vmatrix} = \varepsilon^{ijk} \frac{1}{\eta_i \eta_k} \frac{\partial(\eta_k A_k)}{\partial x^i} \vec{e}_j$$

5.7.3 Campos Conservativos

Assumindo que um condutor filiforme Γ é parametrizado por $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, um ponto do condutor fica definido por $\vec{\ell}(s) = \gamma(s)$, designando-se um segmento do condutor por $d\vec{\ell}(s) = \frac{d\vec{\ell}(s)}{ds} ds$. O integral de caminho duma grandeza $f(\vec{r})$ ao longo de Γ é definido por

$$\int_{\Gamma} f(\vec{\ell}, d\vec{\ell}) \equiv \int_I f\left(\vec{r}(s), \frac{d\vec{\ell}(s)}{ds}\right) ds$$

onde $f(\vec{\ell}, d\vec{\ell})$ é uma função linear em $d\vec{\ell}$!

Definição 5.7.1 — Circulação.

Quando Γ é um **caminho fechado** o integral de caminho $\oint_{\Gamma} f(\vec{\ell}, d\vec{\ell})$ designa-se a **circulação** de f em Γ .

Definição 5.7.2 — Campos Conservativos.

Um campo $\vec{E}(\vec{r})$ é **Conservativo** se a sua circulação sobre **qualquer** caminho fechado Γ é nulo:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Isto significa que o 'trabalho' realizado contra o campo \vec{E} ao longo de um caminho γ_{AB} entre dois pontos A e B apenas depende dos pontos inicial e final e não do caminho usado γ_{AB} . De facto, se usássemos outro caminho $\hat{\gamma}_{AB}$ entre os mesmos pontos, então

$$\int_{\hat{\gamma}_{BA}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\hat{\gamma}_{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

onde $\hat{\gamma}_{BA}$ designa o caminho percorrido no sentido contrário. O caminho $\Gamma = \gamma_{AB} \cup \hat{\gamma}_{BA}$ é então fechado, e

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \left(\int_{\gamma_{AB}} + \int_{\hat{\gamma}_{BA}} \right) \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 = \int_{\gamma_{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{\hat{\gamma}_{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

pelo que o integral deve ser igual para os dois caminhos diferentes que levam de A a B .

Teorema 5.7.1 — Campos Gradientes são Conservativos.

Todo o campo gradiente $\vec{E} = \nabla f$ é **Conservativo**^a:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{f(\Gamma_o)}^{f(\Gamma_1=\Gamma_o)} df = 0$$

^a Se o espaço onde esse campo reside (domínio) for **simplesmente conexo**.

Todos os campos $\vec{E}(\vec{r}) = \nabla f(\vec{r})$, gradientes de uma função escalar $f(\vec{r})$, são conservativos num **espaço simplesmente conexo**⁷ porque $\nabla f \cdot d\vec{r} = df$. Pelo teorema de Stokes e o facto de a fronteira de uma curva fechada ser vazia,

$$\oint_{\Gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_{f(\Gamma)} df = [f]_{\partial f(\Gamma)=\emptyset} = 0$$

Teorema 5.7.2 — Campos Conservativos são Irrotacionais.

Todo o campo Conservativo \vec{E} é **Irrotacional**^b:

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\forall S \downarrow 0) \quad \implies \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

^b Nem todo o campo irrotacional é conservativo, mas em **espaços simplesmente conexos** sim.

Como para qualquer função escalar $f(\vec{r})$ se verifica $\nabla \times \nabla f(\vec{r}) \equiv 0$, quando $\vec{E} = -\nabla f$ tem-se necessariamente $\nabla \times \vec{E} \equiv 0$. Esta é portanto uma condição necessária para se ter um campo \vec{E} conservativo.

Se o espaço onde existe o campo \vec{E} for simplesmente conexo, esta condição também é suficiente, porque então

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

⁷ Um espaço Simplesmente Conexos é um espaço em que todos os caminhos fechados podem ser continuamente deformados para um ponto. Uma esfera lisa é simplesmente conexa, um anel toroidal não.

o que significa que, partindo qualquer caminho fechado Γ em duas partes γ_1 e $\gamma_2 = \Gamma - \gamma_1$, o integral entre os pontos inicial $\gamma_1(s_o) = \gamma_2(s_o) = \vec{\ell}_o$ e final $\gamma_1(s_f) = \gamma_2(s_f) = \vec{r}$ verifica

$$\int_{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\Gamma - \gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}'$$

i.e. obviamente não depende do caminho! Se fixarmos $\vec{\ell}_o$ então

$$\nabla \left(\int_{\gamma_1(\vec{r})} \vec{E}(\vec{\ell}) \cdot d\vec{\ell} \right) = \vec{E}(\vec{r})$$

pelo que podemos definir uma função escalar a menos de uma constante arbitrária

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\gamma_1} \vec{E}(\vec{\ell}) \cdot d\vec{\ell} + \phi(\vec{\ell}_o)$$

tal que $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$.

5.7.4 O Potencial Escalar $\phi(r)$

Definição 5.7.3

O potencial escalar $\phi(\vec{r})$ no ponto \vec{r} associado a um campo eletrostático \vec{E} é igual ao trabalho despendido contra esse campo para **trazer uma carga unitária** desde o infinito até ao ponto \vec{r} .

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^0 \vec{E}(\vec{r} + s\vec{t}) \cdot \vec{t} ds + \phi_{\infty}$$

onde \vec{t} e ϕ_{∞} são constantes arbitrárias porque o campo elétrico é conservativo.

Como \vec{E} tem unidades de Força/Carga, o potencial ϕ é expresso em unidades de Energia/Carga designado por **Volt** ($V = \frac{J}{C}$).

Por definição, o trabalho contra o campo elétrico \vec{E} por unidade de carga ao longo de um caminho Γ de A para B é igual à diferença de potencial entre A e B porque, sendo \vec{E} conservativo, esta diferença não depende do caminho Γ escolhido.

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 &\implies \\ \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= - \int_0^{\infty} \vec{E}(\vec{r}_A + s\vec{t}_1) \cdot \vec{t}_1 ds - \int_{\infty}^0 \vec{E}(\vec{r}_B + s\vec{t}_2) \cdot \vec{t}_2 ds = \\ &= \phi(\vec{r}_A) - \phi(\vec{r}_B) \end{aligned}$$

Reciprocamente a partir da relação $\vec{E} = -\nabla\phi$ se deduz que

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} \equiv -\nabla\phi \cdot d\vec{r} = -d\phi$$

e portanto

$$\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{\ell}_o) = - \int_{\Gamma} \vec{E}(\vec{\ell}) \cdot d\vec{\ell} \equiv - \int_{s_o}^{s_1} \vec{E}(\vec{\ell}(s)) \cdot \frac{d\vec{\ell}(s)}{ds} ds$$

através de qualquer caminho $\Gamma : [s_o, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\ell}(s_1) = \vec{r}$.

■ Exemplo 5.3

- Campo à altura h da superfície da Terra:
$$\begin{cases} E(h < 1.4 \text{ km}) \approx 200 \frac{\text{V}}{\text{m}} \\ E(h \approx 1.4 \text{ km}) \approx 20 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{cases}$$
- Queda de Potencial na Atmosfera : $\Delta\phi_{atm} = 400 \text{ kV}$ em 50 Km
- Densidade de Corrente na Atmosfera: $J_{atm} = 10^{-12} \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$
- Corrente Total na Atmosfera : $i_{atm} = J_{atm} S_{Terra} = 1.8 \times 10^3 \text{ A}$
- Potência Disponível: $\mathcal{P}_{atm} = i_{atm} \Delta\phi = 7.2 \times 10^8 \text{ W}$

O campo electrostático $\vec{E} = -\nabla\phi$ é sempre perpendicular às Superfícies Equipotenciais de V .

Para um deslocamento $d\vec{r} = d\vec{s}$ sobre uma superfície equipotencial $\phi(\vec{s}) = \phi(\vec{s} + d\vec{s})$,

$$d\phi(\vec{s}) = 0 \equiv \nabla\phi(\vec{s}) \cdot d\vec{r}|_{\vec{s}} = -\vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \quad \implies \quad \nabla\phi(\vec{s}) \perp d\vec{s} \quad \therefore \quad \vec{E}(\vec{s}) \perp d\vec{s} \quad \forall d\vec{s}$$

O campo eletrostático $\vec{E} = -\nabla\phi$ aponta sempre no sentido decrescente de ϕ .

Para um deslocamento $d\vec{r}_+$ tal que $\phi(\vec{r}) < \phi(\vec{r} + d\vec{r}_+)$ tem-se $d\phi \equiv \nabla\phi \cdot d\vec{r}_+ > 0$. Como $\vec{E} = -\nabla\phi$ isso significa que $\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}_+ < 0$ i.e. \vec{E} aponta em geral na direção oposta a $d\vec{r}_+$, ou seja na direção de decréscimo de $\phi(\vec{r})$.

As linhas de campo de $\vec{E} = -\nabla\phi$ são perpendiculares às superfícies equipotenciais $\phi = c^{te}$.

Dado um contorno Γ_o arbitrário equipotencial, as linhas de campo que passam por Γ_o são as linhas de 'maior declive' numa superfície cujas 'curvas de nível' são as equipotenciais. De facto, qualquer que seja a superfície S , qualquer das suas linhas equipotenciais resulta de uma intersecção com uma superfície equipotencial, pelo que uma linha de campo passando por um seu ponto é-lhe sempre perpendicular.

5.7.5 Apêndice Matemático: $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$

$$dr = \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} \quad \therefore \quad \nabla(r) = \vec{e}_r \quad \text{portanto} \quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

De forma semelhante

$$d|\vec{r} - \vec{r}_i| = \frac{1}{2} \frac{d|\vec{r} - \vec{r}_i|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$d\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\right) = -\frac{d|\vec{r} - \vec{r}_i|}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \equiv \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\right) \cdot d\vec{r} \quad \therefore \quad \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

5.8 Determinação do campo eletrostático a partir do cálculo do potencial ϕ .

5.8.1 Cálculo do potencial escalar ϕ a partir das cargas

Para uma distribuição discreta de cargas q_i obtém-se do princípio de sobreposição e da Lei de Coulomb:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) = -\nabla \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \implies \phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

onde obviamente $V_\infty = 0$.

Para uma distribuição em volume **no espaço infinito sem condições fronteira** esta expressão generaliza-se para

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|} dV(\vec{r}_c) \quad (5.10)$$

Note-se contudo que na maior parte dos casos não existe uma situação em que se conhece a localização e magnitude de todas as cargas que contribuem para o campo numa região do espaço. Muito mais frequentemente tem-se informação parcial sobre o valor do campo na fronteira duma região do espaço e a distribuição de cargas dentro (ou fora) dessa região apenas. O problema que se põe então é o de reconstruir todo o campo na referida região do espaço com base nessa informação. Obviamente o cálculo do potencial $\phi(\vec{r})$ é mais simples do que o do campo vetorial $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$. Veremos mais à frente que o potencial eletrostático deve obedecer a uma equação diferencial particular designada equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

e que existe um método geral para construir as suas soluções dadas as cargas (discretas ou contínuas) e as condições fronteira especificadas nos limites de uma região finita ou infinita Ω do espaço através das chamadas **Funções de Green** $G(\vec{r}, \vec{r}')$. Estas são soluções da equação particular ⁸

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

com as mesmas condições fronteira. Uma vez encontrada esta solução **para essas condições fronteira**, o potencial devido à distribuição de cargas $\rho(\vec{r}_c)$ na região Ω é

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}_c) \rho(\vec{r}_c) dV(\vec{r}_c) \quad (5.11)$$

Comparando a solução (5.10), válida quando $\Omega = \mathbb{R}^3$ com condições fronteira

$$\vec{E}(\infty) = -\nabla\phi(\vec{r})|_{\partial\Omega=\infty} = 0$$

com (5.11) deduzimos que naquele caso

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

⁸ A **função de Impulso** ou **Delta de Dirac** $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ não é rigorosamente uma função mas antes uma distribuição. Geometricamente tem valor nulo para $\vec{r} \neq \vec{r}'$ e infinito em \vec{r}' . Contudo o seu integral em qualquer região contendo

5.8.1.1 Potencial de uma distribuição de cargas.

Para qualquer distribuição de cargas, o princípio de sobreposição garante que o campo resultante $\vec{E}(\vec{r})$ em \vec{r} é conservativo também, porque o são todas as contribuições geradas por cargas individuais discretas pontuais q_i , ou infinitesimais contínuas $dq(\vec{r}_o)$, para o campo em \vec{r} .

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}_o)}{|\vec{r}-\vec{r}_o|^3} dq(\vec{r}_o) = \\ &= -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{dq(\vec{r}_o)}{|\vec{r}-\vec{r}_o|} + \phi_o \right)\end{aligned}$$

uma vez que $\frac{\vec{r}}{r} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ e o gradiente em ordem a \vec{r} pode ser retirado para fora do integral dependente de \vec{r}_o . Temos assim em geral que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{dq(\vec{r}_o)}{|\vec{r}-\vec{r}_o|} + \phi_o$$

onde ϕ_o é uma constante arbitrária, e $dq(\vec{r}_o)$ pode ser uma carga elementar em \vec{r}_o associada a uma distribuição linear, superficial ou volúmica de carga. O integral respetivo na fórmula anterior é então um integral de linha, de superfície ou de volume.

\vec{r}' é unidade. Tem a seguinte propriedade:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}-\vec{r}') f(\vec{r}) dV(\vec{r}) = f(\vec{r}')$$

para qualquer função $f(\vec{r})$ contínua em \vec{r}' . O Delta de Dirac a uma dimensão pode ser encarado como o limite de verdadeiras funções, por exemplo:

$$\delta(x) = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega x)}{\pi x} \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} \end{cases}$$

O Delta de Dirac n -dimensional $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ em coordenadas curvilíneas $\vec{r} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \mathcal{F}(\vec{x})$ é o produto de n deltas uni-dimensionais em coordenadas cartesianas $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, dividido pelo Jacobiano $J(\vec{r}, \vec{x}) = \det(D\mathcal{F}(\vec{x}))$, resultante da expressão do volume n dimensional porque

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(\mathcal{F}(\vec{x})-\vec{r}') = \frac{1}{J(\vec{r}, \vec{x})} \prod_{i=1}^n \delta(x_i - \mathcal{F}_i^{-1}(\vec{r}'))$$

$$\iiint \delta(\vec{r}-\vec{r}') f(\vec{r}) dV(\vec{r}) = \iiint \delta(\mathcal{F}(\vec{x})-\vec{r}') f(\mathcal{F}(\vec{x})) \det(D\mathcal{F}(\vec{x})) dV(\vec{x}) = \iiint \prod_{i=1}^n \delta(x_i - \mathcal{F}_i^{-1}(\vec{r}')) f(\mathcal{F}(\vec{x})) dV(\vec{x}) = f(\vec{r}')$$

Em particular, em coordenadas cartesianas obviamente

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \prod_{i=1}^n \delta(x_i - x_i')$$

Exercício 5.2 — Campo de um dipolo de momento dipolar $\vec{p} = q\vec{d}$.

Um dipolo elétrico é constituído por duas cargas q e $-q$, em posições \vec{r}_+ e \vec{r}_- , separadas por uma distância $d = |\vec{r}_+ - \vec{r}_-|$. O momento dipolar é o vetor

$$\vec{p} = q\vec{d} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

Para pontos a uma distância $r \gg d$ do centro do dipolo, determine:

- O potencial elétrico do dipolo $\phi(\vec{r})$.
- O campo elétrico do dipolo $\vec{E}(\vec{r})$.

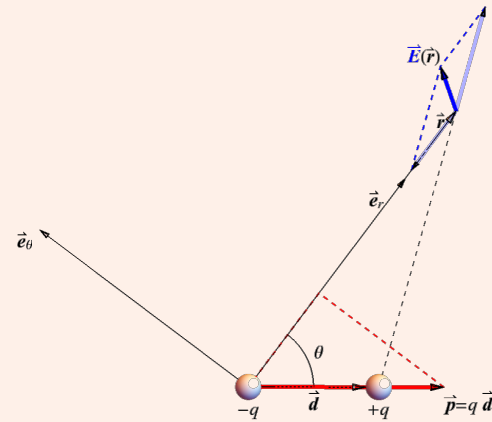


Figura 5.20: Dipolo Elétrico

Resposta 5.2 Potencial do Dipolo de momento dipolar $\vec{p} = q\vec{d} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \right) = -\nabla\phi(\vec{r}) \quad \therefore \quad \phi(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \left(\text{para } r \gg \frac{|\vec{p}|}{q} \right)$$

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta)$$

Para um dipolo arbitrário o campo $\vec{E}(\vec{r})$ pode-se determinar facilmente para distâncias grandes comparadas com a separação de cargas d .

Se \vec{r} representar a posição relativa do ponto no espaço em relação à carga $-q$, e $\vec{r} - \vec{d}$ a posição relativa à carga positiva $+q$, então usando a expansão de Taylor para $f(\vec{r} - \vec{d}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}|^3}$, sendo esta em geral:

$$f(\vec{r} + \vec{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{h} \cdot \nabla)^n f(\vec{r}) = f(\vec{r}) + \vec{h} \cdot \nabla f(\vec{r}) + \dots$$

obtém-se, desprezando termos de ordem $n \geq 2$ na expansão,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left((\vec{r} - \vec{d}) \left(\frac{1}{r^3} + (-\vec{d}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \right) - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \right)$$

O momento dipolar sendo $\vec{p} = q\vec{d}$

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{r^3} - 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\nabla\phi(\vec{r})$$

po que o potencial na região $r \gg d$ é aproximado por

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \tag{5.12}$$

Se $\vec{p} = qd \vec{e}_x$, então em coordenadas esféricas $\vec{p} = p(\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta)$

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta)$$

Podemos obter também o potencial deste campo nesta aproximação usando a expansão em série de Taylor para o potencial exato

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{d}|} - \frac{q}{r} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + (-\vec{d} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}$$

ou seja, na região $r \gg d$

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos(\theta)$$

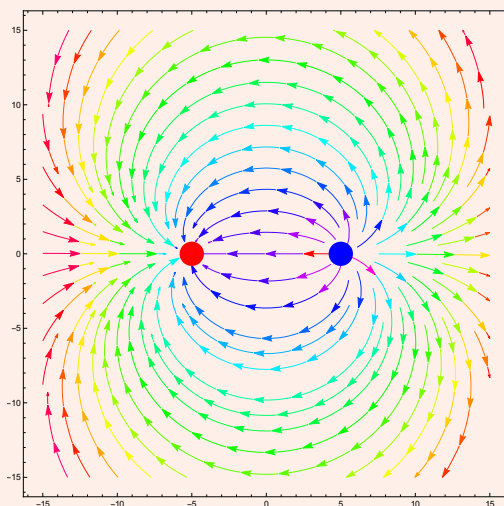


Figura 5.21: Linhas de campo de um dipolo elétrico, i.e. duas carga iguais de sinais contrários (azul=positiva).

5.8.1.2 Campo e Potencial de uma distribuição de carga retilínea, infinita e uniforme, com densidade constante λ

Usando a Lei de Gauss:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r = -\nabla\phi(\vec{r}) \quad \therefore \quad \phi(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log(r)$$

5.8.1.3 Campo de uma barra retilínea de comprimento $2L$ e densidade de carga λ constante

Usando coordenadas cilíndricas com o eixo \vec{e}_z alinhado com a barra e origem no seu centro, podemos calcular o potencial $\phi(\vec{r})$ num ponto \vec{r} do plano meridional (i.e. o plano horizontal $z = 0$). Pela definição de potencial de uma distribuição contínua de carga, cada elemento $dq(s) = \lambda dz$ na posição $\vec{r}_s = s \vec{e}_z$ da barra contribui para o potencial em $\vec{r} = r \vec{e}_r(\theta)$ de forma que

$$\phi(r) = \phi_o + \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(s)}{|\vec{r} - \vec{r}_s|}$$

$$\phi(r) = \phi_o + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\lambda}{\sqrt{r^2 + s^2}} ds = \phi_o + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left(\frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \right)$$

O cálculo do integral pode ser feito por mudança de variável

$$\frac{s}{r} = \sinh(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{\sqrt{r^2 + s^2}} = \frac{d \sinh(\theta)}{\sqrt{1 + \sinh^2 \theta}} = d\theta$$

onde⁹

$$\theta = \sinh^{-1}\left(\frac{s}{r}\right) = \log\left(\frac{s}{r} + \sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 + 1}\right)$$

No limite $L \rightarrow \infty$ temos um fio infinito de densidade linear de carga λ constante e todos os pontos podem ser considerados meridionais

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right) \rightarrow 2\log(2) - 2\log(x) \quad \left(\frac{r}{L} = x \rightarrow 0\right)$$

$$\phi(r) = \phi_o - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \log(r) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \frac{1}{r} \vec{e}_r(\theta)$$

Para um ponto genérico $\vec{r} = r \vec{e}_r(\theta) + z \vec{e}_z$ podemos calcular o potencial $\phi(\vec{r})$ tendo em conta que agora $|\vec{r} - \vec{r}_o| = \sqrt{r^2 + (s-z)^2}$. Para todos os efeitos $ds = d(s-z)$ porque z é aqui constante, pelo que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \log\left(\frac{\sqrt{(L-z)^2 + r^2} + (L-z)}{\sqrt{(L+z)^2 + r^2} - (L+z)}\right) + \phi_o$$

$$E_r = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r} \left(\frac{z-L}{\sqrt{r^2 + (z-L)^2}} - \frac{z+L}{\sqrt{r^2 + (z+L)^2}} \right)$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+L)^2}} \right)$$

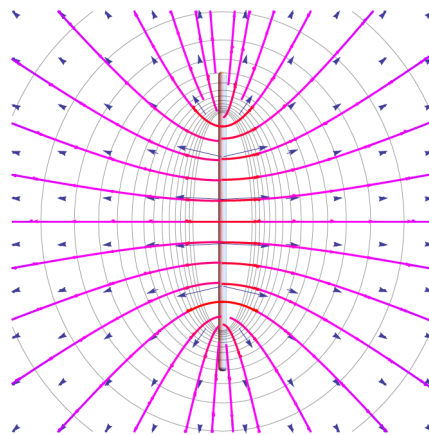


Figura 3

5.8.1.4 Potencial no eixo dum disco de raio R e densidade superficial de carga σ constante

Para um ponto P à cota z no eixo de um disco de raio R , designando por r a distância ao eixo, temos pelo cálculo direto

⁹ $\sinh(\theta) = x = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \Leftrightarrow e^{2\theta} - 2xe^\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\theta = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$$\phi(z) - \phi_o = \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\sigma}{\sqrt{r^2 + z^2}} dS(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\sigma r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)$$

Quando $z \ll R$, usando $\phi_o = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_o}$, obtemos

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left(R \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}} - 1 \right) - |z| \right) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{R} - |z| \right)$$

No limite $R \rightarrow \infty$ todos os pontos do plano são equivalentes à origem, e fazendo $|z| = \sqrt{z^2}$

$$\phi(z) \approx -\frac{\sigma}{2\epsilon_o} |z|$$

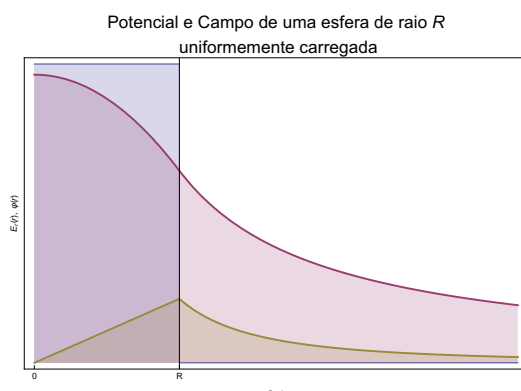
$$\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_o} \nabla \left(-\sqrt{z^2} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} \right) \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \text{sgn}(z) \vec{e}_z$$

5.8.1.5 Potencial duma distribuição de carga Q numa esfera não condutora de densidade uniforme

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

O potencial tem que ser contínuo na transição do lado de fora para o lado de dentro da esfera, por isso a constante ϕ_o deve ser escolhida de forma a garantir isso.

Neste caso o cálculo do potencial diretamente torna-se muito mais complicado do que é necessário. A utilização da Lei de Gauss permite calcular muito facilmente o campo elétrico, e a definição $\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_o) - \int_{\vec{r}_o, \vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ permite calcular o potencial a partir de \vec{E} .



$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_o} \vec{r} & \text{se } r < R \\ \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_o} \frac{R^3}{r^3} \vec{r} & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{6\epsilon_o} (r^2 - 3R^2) & \text{se } r < R \\ \phi(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_o} \frac{R^3}{r} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

Exercício 5.3 — Campo de rotura no ar.

O campo de descarga ou rotura no ar (i.e o limiar do campo elétrico acima do qual o ar passa a condutor) é $E_{max} = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$.

- Qual é o máximo potencial a que se pode levar um condutor cilíndrico, de raio $R = 8 \text{ cm}$, isolado no ar antes que se dê uma descarga?
- Qual é o raio mínimo de uma esfera que é capaz de reter $Q = 1 \text{ C}$ de carga elétrica isolada no ar?
- Duas esferas condutoras de raios $R_1 = 2 \text{ cm}$ e $R_2 = 6 \text{ cm}$ estão ligadas por um fio condutor comprido. Determine a razão entre os campos elétricos à superfície de cada uma, desprezando influência elétrica mútua.

Resposta 5.3

- a) O campo de um condutor retilíneo infinito com distribuição uniforme de carga $\lambda \left(\frac{\text{C}}{\text{m}}\right)$ é facilmente derivado usando a lei de Gauss para um cilindro de raio r e altura L , coaxial com o condutor:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_r(r) 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Daqui se deduz o campo $\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r$ e também a forma do potencial $V(r)$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \log(r)$$

A densidade linear de carga necessária para se obter o campo de rotura $E_{max} = 3 \times 10^6 \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$ é

$$\lambda = 2\pi \epsilon_0 R E_{max} = 1.33 \times 10^{-5} \left(\frac{\text{C}}{\text{m}}\right)$$

À superfície do condutor $r = R = 0.08 \text{ m}$ e o potencial máximo a que se pode ter o condutor é

$$V_{max} = -R E_{max} \log(R) = 6.06175 \times 10^5 \text{ (V)}$$

- b) O campo de uma distribuição superficial uniforme de carga $Q = 1 \text{ (C)}$ numa esfera condutora de raio R é radial, e na superfície da esfera

$$E_r(R) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad R_{min} = \sqrt{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 E_{max}}} = 10\sqrt{30} \text{ m}$$

- c) Se cada esfera tiver carga Q_1 e Q_2 então, assumindo que estão suficientemente longe para desprezar efeitos de influência elétrica, podemos calcular as cargas Q_1 e Q_2 sabendo a carga inicial $Q = Q_1 + Q_2$. A expressão do potencial à superfície de cada esfera, assumindo-as separadas por uma distância $d \gg R_1, R_2$, é

$$V_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{d} \right) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{d} + \frac{Q_2}{R_2} \right) = V_2$$

A substituição nesta equação da condição de conservação de carga $Q_2 = Q - Q_1$ permite concluir que

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{QR_1}{R_1 + R_2} & \text{pelo que } \sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R_1(R_1 + R_2)} \\ Q_2 = \frac{QR_2}{R_1 + R_2} & \text{pelo que } \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R_2(R_1 + R_2)} \end{cases}$$

Como o campo à superfície de condutores em equilíbrio eletrostático deve ser $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ obtemos

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

ou seja, embora a esfera menor retenha menos carga, o campo à sua superfície é maior porque a sua curvatura é maior. Por isso é que para se obter descargas elétricas se utilizam condutores em forma de agulha já que na sua ponta se criam campos muito intensos para potenciais não muito elevados, e desde que estes campos sejam maiores que o campo de rotura do dielétrico adjacente ao condutor obter-se-á uma descarga.

5.8.2 Energia de uma distribuição contínua de cargas.

5.8.2.1 Densidade de Energia Eletrostática

De acordo com a expressão generalizada para a energia de uma distribuição contínua de cargas livres com densidade $\rho_c(\vec{r})$ num campo potencial $\phi(\vec{r})$, podemos generalizar as expressões anteriores para a energia U_e

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \rho_c V d\mathcal{V}$$

onde $V(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_o)$ para \vec{r}_o um ponto de referência comum fixo. (Geralmente $\vec{r}_o = \infty$ para **distribuições finitas de cargas**, e $\phi_\infty = 0$ pelo que $V(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$, mas para **distribuições infinitas de cargas**, como um fio infinito ou o plano uniformemente carregados, onde $\phi_\infty = \infty$, a energia total é também infinita.)

A lei de Gauss por outro lado indica que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$ pelo que

$$\rho_c V = \nabla \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (V \vec{D}) - \vec{D} \cdot \nabla V = \nabla \cdot (V \vec{D}) + \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Assim obtemos da expressão geral

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \rho_c V d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int \int_{\mathcal{S}} V \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} d\mathcal{V}$$

No caso em que o campo se estende até ao infinito o primeiro integral anula-se porque \mathcal{S} cresce com r^2 mas o integrando decresce com r^{-3} . Assim, designado a **densidade de energia eletrostática** por

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_o E^2 \equiv \frac{1}{2\epsilon} D^2$$

podemos escrever

$$U_e = \iiint_{\mathcal{V}} u_e d\mathcal{V} \equiv \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} d\mathcal{V}$$

5.8.2.2 Exemplo: Energia numa esfera carregada uniformemente.

Assumindo uma esfera de raio R e carga Q uniformemente distribuída em volume, podemos calcular a energia que está aí acumulada de várias formas

– Método do transporte de cargas

Assumimos que vamos construindo a esfera carregada por acumulação gradual e simétrica de esferas de raio r desde o centro até ao raio final R . A carga de uma esfera de raio r e densidade constante $\rho_c = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ é

$$Q(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c = Q \frac{r^3}{R^3}$$

Uma concha esférica de espessura dr e raio interior r tem um volume e carga

$$dV(r) = 4\pi r^2 dr \quad \Rightarrow \quad dQ(r) = \rho_c dV(r) = 3Q \frac{r^2}{R^3} dr$$

O potencial à superfície da esfera de raio r é

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r^2}{R^3}$$

Assim a energia necessária para acumular a carga desta esfera deve ser

$$U_e = \int \phi(r) dQ(r) = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3Q^2 r^4}{R^6} \right) dr = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \right)$$

– Método da energia potencial

De acordo com a expressão generalizada para a energia de uma distribuição de cargas

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \rho_c V d^3\mathcal{V}$$

Mas o potencial no interior de uma esfera uniformemente carregada é, pela definição

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_o) - \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.13)$$

Como $\phi_\infty = 0$, podemos escolher $\vec{r}_o = \infty$ e $V(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \phi_\infty \equiv \phi(\vec{r})$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} & \text{se } r < R \\ \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^3} \vec{r} & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - 3R^2) & \text{se } r < R \\ \phi(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

por isso, como só existem cargas no volume \mathcal{V} ,

$$U_{el} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \rho_c V d^3\mathcal{V} = \frac{1}{2} 4\pi \int_0^R \frac{\rho_c^2}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) r^2 dr = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \right)$$

Método da densidade de energia do campo elétrico

Uma vez que existe campo elétrico dentro e fora da esfera, torna-se necessário calcular o integral sobre todo o espaço, dentro (\mathcal{V}_{int}) e fora (\mathcal{V}_{ext}) da esfera. Usando as expressões acima indicadas para o campo em função de r , obtemos

$$\begin{aligned} U_e &= \iiint_{\mathcal{V}_\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|^2 d^3\mathcal{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\iiint_{\mathcal{V}_{int}} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \right)^2 d^3\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}_{ext}} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right)^2 d^3\mathcal{V} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \left(\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{5} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \end{aligned}$$

5.8.3 Força e pressão em Dielétricos na ausência de cargas livres

Teorema 5.8.1 — Pressão à superfície em Dielétricos.

A pressão na superfície de separação entre dois dielétricos de permitividades ε_1 e ε_2 é dada pela expressão

$$p_{21} = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(|\vec{E}_{\parallel}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} |\vec{D}_{\perp}|^2 \right)$$

no sentido do dielétrico de maior permitividade para o de menor permitividade.

Demonstração 5.8.1

Pela definição de energia eletrostática, as energias dos campos em dielétricos de permitividades ε_1 e ε_2 separados por uma superfície S , é respetivamente

$$U_1 = \frac{1}{2} \iiint_{\mathfrak{V}_1} \vec{D}_1 \cdot \vec{E}_1 d\mathfrak{V} \quad ; \quad U_2 = \frac{1}{2} \iiint_{\mathfrak{V}_2} \vec{D}_2 \cdot \vec{E}_2 d\mathfrak{V}$$

Suponhamos que a superfície S sofre um deslocamento de forma que parte $\Delta\mathfrak{V}$ do volume \mathfrak{V}_1 é ocupado pelo dielétrico de \mathfrak{V}_2 , mas as cargas que criam os campos permanecem inalteradas. A variação de energia é assim

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} \iiint_{\Delta\mathfrak{V}_2} (\vec{D}_2 \cdot \vec{E}_2 - \vec{D}_1 \cdot \vec{E}_1) d\mathfrak{V} = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\Delta\mathfrak{V}} (\vec{D}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{D}_2 \cdot \vec{E}_1) d\mathfrak{V} + \frac{1}{2} \iiint_{\Delta\mathfrak{V}} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) d\mathfrak{V} \end{aligned}$$

Tendo em conta que, na ausência de cargas livres no dielétrico

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\nabla(\phi_1 + \phi_2) = -\nabla\phi$$

$$\nabla \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0$$

obtemos em geral que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{\Delta\mathfrak{V}} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) d\mathfrak{V} &= -\frac{1}{2} \iiint_{\Delta\mathfrak{V}} \nabla\phi \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) d\mathfrak{V} = \\ &= -\frac{1}{2} \iiint_{\Delta\mathfrak{V}} \nabla \cdot (\phi(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)) - \phi \nabla \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) d\mathfrak{V} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_S \phi (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot d\vec{S} = 0 \end{aligned}$$

porque na transição entre dielétricos $\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}$. Assim concluímos que

$$\Delta U = \frac{1}{2} \iiint_{\Delta\mathfrak{V}} (\vec{D}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{D}_2 \cdot \vec{E}_1) d\mathfrak{V} = \frac{1}{2} \iiint_{\Delta\mathfrak{V}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\mathfrak{V}$$

Tendo em conta as condições fronteira

$$\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} \quad ; \quad \vec{D}_1^{\perp} = \vec{D}_2^{\perp}$$

podemos escrever para qualquer dos campos

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = \vec{E}_{\parallel} + \frac{1}{\epsilon} \vec{D}_{\perp}$$

e portanto, na fronteira S

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \vec{E}_1^{\parallel} \cdot \vec{E}_2^{\parallel} + \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \vec{D}_1^{\perp} \cdot \vec{D}_2^{\perp} = |\vec{E}_{\parallel}|^2 + \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} |\vec{D}_{\perp}|^2$$

Assumindo que $d\mathcal{V} = d\vec{S} \cdot d\vec{r}$ para um deslocamento $d\vec{r}$ fixo, o integral acima pode entender-se como

$$\Delta U = \left(\iint_S \frac{1}{2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \left(|\vec{E}_{\parallel}|^2 + \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} |\vec{D}_{\perp}|^2 \right) d\vec{S} \right) \cdot d\vec{r}$$

Obtemos assim uma expressão para a pressão exercida na superfície entre os dois dielétricos porque o trabalho mecânico no **sistema isolado de dielétricos + cargas** deve verificar

$$\Delta U_{mec} = -\Delta U = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ou seja

$$\vec{F} = -(\nabla U)_Q = \iint_S \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \left(|\vec{E}_{\parallel}|^2 + \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} |\vec{D}_{\perp}|^2 \right) d\vec{S}$$

pelo que a pressão à superfície \mathfrak{S} é

$$p_{21} = \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \left(|\vec{E}_{\parallel}|^2 + \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} |\vec{D}_{\perp}|^2 \right)$$

no sentido do dielétrico de maior permitividade para o de menor permitividade.

Exercício 5.4 — Força sobre dielétrico em condensador plano.

Assumindo que um condensador plano de armaduras de área A e separação d está parcialmente cheio com um dielétrico de permitividade ϵ , qual a magnitude e o sentido da força exercida sobre o dielétrico?

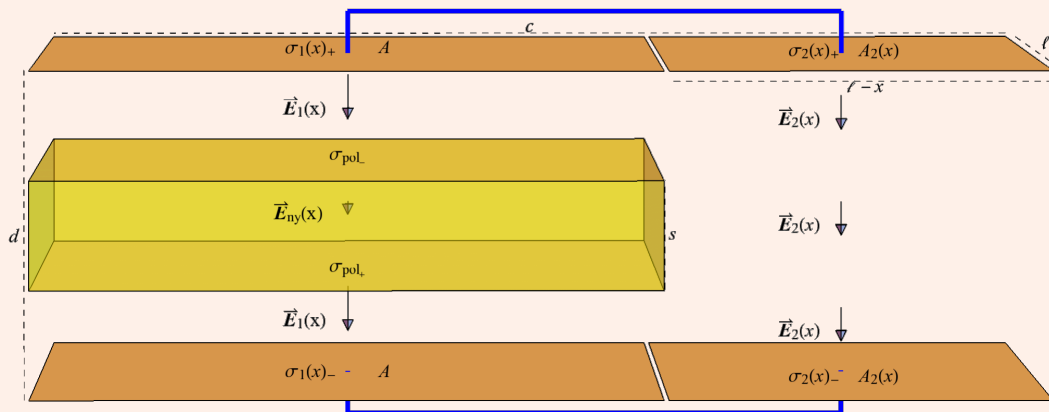


Figura 5.22: Condensador plano parcialmente cheio com dielétrico

Resposta 5.4

A capacidade do condensador com o dielétrico inserido x metros na direção \vec{e}_x dentro do condensador pode

ser calculada como a de dois condensadores em paralelo, um com cheio de dielétrico e armaduras de área $A_1(x) = x\ell$ e outro só com ar e armaduras de área $A_2(x) = (A - x\ell)$, onde ℓ é a largura da armadura (dimensão na direção \vec{e}_y). A capacidade dos dois é a soma das capacidades de cada um, e assim

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) = \frac{\varepsilon A_1(x)}{d} + \frac{\varepsilon_0 A_2(x)}{d}$$

$$C(x) = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)x\ell + \varepsilon_0 A}{d} = \alpha x + \beta$$

onde fazemos

$$\alpha = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\ell}{d} \quad ; \quad \beta = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

A energia armazenada neste condensador é $U_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)}$, e quando x aumenta para $x + dx$, a variação de energia é

$$dU_c = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)^2} \frac{dC(x)}{dx} dx$$

A expressão para a variação de energia armazenada passa assim a escrever-se em função de x como

$$dU_c = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{(\alpha x + \beta)^2} \alpha dx$$

Estando isolado, a energia total do sistema condensador+dielétrico não pode variar, pelo que a variação negativa de energia do condensador dU_c deve ser compensada com o trabalho dW_d realizado sobre o dielétrico.

$$dU_{tot} = dW_d + dU_c = 0 \quad \Rightarrow \quad dW_d = -dU_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(\alpha x + \beta)^2} \alpha dx$$

Uma vez que o deslocamento do dielétrico é linear na direção \vec{e}_x , o trabalho realizado sobre o dielétrico pode ser visto como

$$dW_d = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(\alpha x + \beta)^2} \alpha dx$$

Desta expressão deduzimos que a força sobre o dielétrico que realiza este trabalho é

$$F_x(x) = \frac{1}{2} \frac{\alpha Q^2}{(\alpha x + \beta)^2} = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{Q^2}{((\varepsilon - \varepsilon_0)\ell x + \varepsilon_0 A)^2} \ell d$$

Tendo em conta que

$$E_z(x) = \frac{V(x)}{d} = \frac{Q}{C(x)d} = \frac{Q}{((\varepsilon - \varepsilon_0)\ell x + \varepsilon_0 A)}$$

obtemos também a partir da pressão p_{12} sobre a face interna do dielétrico, de área $\mathfrak{S} = \ell d$, que

$$F_x(x) = p_{12}(x)\mathfrak{S} = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) E_z^2(x) \ell d = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) E_z^2(x) \ell d$$

$$F_x(x) = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{Q^2 \ell d}{((\varepsilon - \varepsilon_0)\ell x + \varepsilon_0 A)^2}$$

5.9 Equação de Poisson

A partir da Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r})$$

e do facto de o campo eletrostático ser conservativo,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

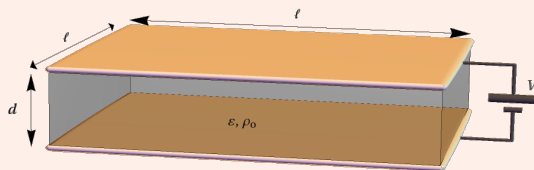
obtém-se a **equação de Poisson** que determina o potencial $V(\vec{r})$ uma vez conhecidas as distribuições de carga $\rho(\vec{r})$ e as condições fronteira (como por exemplo $V(\vec{r}_i) = V_i$ constante sobre a superfície de condutores

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

No espaço livre de cargas esta equação define o potencial como uma função harmónica verificando a equação de Laplace

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

A equação de Poisson $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ para o potencial $V(\vec{r})$ de uma distribuição de cargas $\rho(\vec{r})$ **tem sempre soluções**, e estas **são únicas**, desde que se especificuem adequadamente as **condições fronteira** a que o potencial deve obedecer.

Exercício 5.5 — CAMPO E POTENCIAL ELÉTRICO DUM CONDENSADOR PLANO.

Considere um sistema formado por duas placas metálicas planas e paralelas de área $A = \ell^2$ e separação $d \ll \ell$. A preencher o espaço entre as duas placas está um dielétrico de permitividade ϵ com uma densidade constante de carga ρ_o .

- Assumindo que o potencial de uma das placas é $\phi(0) = 0$ e o da outra é $\phi(d) = V$, determine o potencial em todos os pontos entre as placas a partir da equação de Poisson.
- Determine o campo elétrico em todos os pontos entre as placas, e a energia armazenada. Despreze efeitos fronteira do campo.
- Determine a densidade superficial de carga nas placas metálicas e as densidades de carga de polarização no dielétrico.

Resposta 5.5

R: a) Utilizando a equação de Poisson no espaço entre as placas onde a densidade de carga verdadeira é ρ_o , uma constante, obtemos em coordenadas cartesianas onde $z \in [0, d]$ representa a distância a uma das placas na direção da outra,

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_o}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} = -\frac{\rho_o}{\epsilon} = -\alpha \quad \therefore \quad \phi(z) = -\frac{\alpha}{2} z^2 + \beta z + \gamma$$

Utilizando as condições fronteira afirmando basicamente que cada armadura é um plano equipotencial e a diferença de potencial entre as armaduras é V , podemos obter a expressão para $\phi(z)$:

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 & \Rightarrow \quad \gamma = 0 \\ \phi(d) = V & \Rightarrow \quad \beta = \frac{V}{d} + \frac{d\rho_o}{2\epsilon} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \phi(z) = -\frac{\rho_o}{2\epsilon} z^2 + \left(\frac{V}{d} + \frac{d\rho_o}{2\epsilon} \right) z$$

R: b) A partir do potencial $\phi(z)$ obtém-se o campo elétrico através da relação:

$$\vec{E} = -\nabla\phi = E_z \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad E_z(z) = -\frac{d\phi(z)}{dz} = \frac{\rho_o}{\epsilon} \left(z - \frac{d}{2} \right) - \frac{V}{d}$$

Note-se que na região exterior próximo das placas $\rho = 0$ pelo que a equação de Poisson afirma agora que (assumindo ainda que $\phi = \phi(z)$)

$$\nabla^2 \phi = \frac{d^2 \phi}{dz^2} = -\frac{dE_z}{dz} = 0$$

ou seja, em cada semi-espaço $z > d$ ou $z < 0$, o campo elétrico deve ser constante e igual ao seu valor na fronteira. Contudo, ao impor uma diferença de potencial V entre as placas estamos a adicionar cargas nas placas que criam um campo elétrico $\vec{E}_o = -\frac{V}{d} \vec{e}_z$ que se adiciona ao campo \vec{E}' devido às cargas entre as placas. Se usarmos a Lei de Gauss podemos ver que este campo é determinado pela simetria $E'_z(z) = -E'_z(d-z)$ e

$$E'_z(z) - E'_z(d-z) = \frac{\rho_o(2z-d)}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad E'_z(z) = \frac{\rho_o}{\epsilon} \left(z - \frac{d}{2} \right)$$

Assim $\vec{E}(z) = \left(E'_z(z) - \frac{V}{d} \right) \vec{e}_z$ e na fronteira $E_z(0^+) = -\frac{\rho_o d}{2\epsilon} - \frac{V}{d}$, $E_z(d^-) = \frac{\rho_o d}{2\epsilon} - \frac{V}{d}$. Como a densidade superficial de carga nas armaduras deve ser $\sigma_{\pm} = \pm \epsilon \frac{V}{d}$, a descontinuidade do campo na transição através das

placas deve ser

$$\left(\vec{E}(d^+) - \vec{E}(d^-)\right) \cdot \vec{e}_z = \frac{\sigma_+}{\epsilon} = \frac{V}{d} \quad ; \quad \left(\vec{E}(0^-) - \vec{E}(0^+)\right) \cdot (-\vec{e}_z) = \frac{\sigma_-}{\epsilon} = -\frac{V}{d}$$

$$\vec{E} = E_z \vec{e}_z = \begin{cases} E_z(z) = \frac{\rho_o}{\epsilon} \left(z - \frac{d}{2}\right) - \frac{V}{d} & (0 \leq z \leq d) \\ E_z(z) = \text{sgn}\left(z - \frac{d}{2}\right) \frac{\rho_o d}{2\epsilon} & (z > d) \text{ ou } (z < 0) \end{cases}$$

A energia armazenada nesta distribuição de cargas entre as placas é

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho_o \phi(\vec{r}) dV(\vec{r}) + \frac{1}{2} CV^2 = \\ &= \frac{1}{2} A \rho_o \int_0^d \left(-\frac{\rho_o}{2\epsilon} z^2 + \left(\frac{V}{d} + \frac{d\rho_o}{2\epsilon}\right) z\right) dz + \frac{\epsilon AV^2}{2d} = \\ &= \frac{\rho_o^2 A d^3}{24\epsilon} + \frac{1}{4} \rho_o A dV + \frac{\epsilon AV^2}{2d} \end{aligned}$$

R: c) As densidades de carga de polarização podem agora ser determinadas:

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_o) \vec{E} = \frac{(\epsilon - \epsilon_o)}{\epsilon} \vec{D} \implies \begin{cases} \rho' = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_o)}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_o)}{\epsilon} \rho_o \\ \sigma'_+ = \vec{P}(0^+) \cdot (-\vec{e}_z) = -(\epsilon - \epsilon_o) E_z(0^+) = (\epsilon - \epsilon_o) \left(\frac{\rho_o d}{2\epsilon} + \frac{V}{d}\right) \\ \sigma'_- = \vec{P}(d^-) \cdot \vec{e}_z = (\epsilon - \epsilon_o) E_z(d^-) = (\epsilon - \epsilon_o) \left(\frac{\rho_o d}{2\epsilon} - \frac{V}{d}\right) \end{cases}$$

Exercício 5.6 DETERMINAÇÃO DO POTENCIAL NUM CONDENSADOR ESFÉRICO

Considere o condensador esférico representado na figura, constituído por um condutor interior de raio R_1 e por uma coroa esférica de raios R_2 e R_3 , separados por um dielétrico de permitividade relativa $\epsilon_r = 2$.

- a) Sabendo que os dois condutores se encontram aos potenciais $\phi(R_1) = V_1$ (condutor interior) e $\phi(R_2) = V_2$ (coroa esférica), determine as expressões do potencial elétrico e do campo eletrostático no espaço entre armaduras.
- b) Determine a carga elétrica existente em cada armadura do condensador e as densidades de carga de polarização no dielétrico.

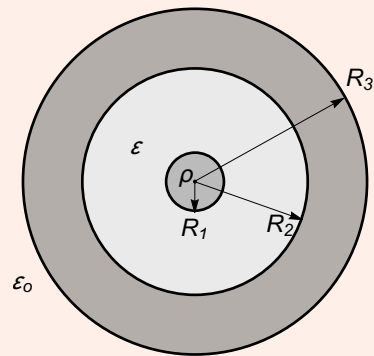


Figura 5.23: Condensador esférico

Resposta 5.6

R: a) Dado que não existe carga no espaço entre as armaduras, e pela simetria esférica do potencial, $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$, obtemos a equação de Laplace em coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r) = 0 \quad \implies \quad & \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = 0 \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

Para $r \neq 0, \infty$ esta equação significa

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{k_1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \phi(r) = -\frac{k_1}{r} + k_2$$

$$\begin{cases} V_1 = -\frac{k_1}{R_1} + k_2 \\ V_2 = -\frac{k_1}{R_2} + k_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = \frac{(V_1 - V_2)R_1 R_2}{R_1 - R_2} \\ k_2 = \frac{R_1 V_1 - R_2 V_2}{R_1 - R_2} \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(r) = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{V_1 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

R:b) À superfície da armadura interior a descontinuidade do vetor deslocamento elétrico \vec{D} permite determinar a densidade superficial de carga livre. Se $\vec{n} = \vec{e}_r$ designa a normal à superfície, e dado que dentro do condutor o campo se anula,

$$\left(\vec{D}(R_1^+) - \vec{D}(R_1^-) \right) \cdot \vec{n} = \sigma(R_1) \quad \Rightarrow \quad \sigma(R_1) = D_r(R_1^+) = \varepsilon E_r(R_1^+) = \frac{\varepsilon V_1 R_2}{R_1 (R_2 - R_1)}$$

A carga elétrica na armadura interior será

$$q_1 = \sigma(R_1) 4\pi R_1^2 = \frac{4\pi\varepsilon V_1 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

e na armadura exterior $q_2(R_2) = -q_1$ (por aplicação da Lei de Gauss a uma superfície fechada passando por dentro da armadura exterior), enquanto $q_2(R_3) = 0$ porque a armadura está ligada à Terra e $\vec{E}_{int}(R_3^-) = 0$, $\vec{E}_{ext}(R_3^+) = 0$, $V_2 = V_\infty = 0$. As densidades de carga de polarização existem apenas à superfície do dielétrico por se tratar de um dielétrico LHI descarregado, $\rho = 0 \Rightarrow \rho' = 0$. Na superfície interior a normal exterior ao dielétrico é $\vec{n}_1 = -\vec{e}_r$, e da polarização $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o) \vec{E}$ obtemos

$$\sigma'(R_1^+) = \vec{P}(R_1^+) \cdot \vec{n}_1 = -(\varepsilon - \varepsilon_o) E_r(R_1^+) = -(\varepsilon_r - 1) \varepsilon_o \frac{V_1 R_2}{R_1 (R_2 - R_1)}$$

Na superfície exterior do dielétrico a normal é $\vec{n}_2 = \vec{e}_r$ pelo que

$$\sigma'(R_2^-) = \vec{P}(R_2^-) \cdot \vec{n}_2 = (\varepsilon - \varepsilon_o) E_r(R_2^-) = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_o \frac{V_1 R_1}{R_2 (R_2 - R_1)}$$

As cargas de polarização devem ter soma nula, ou seja

$$q'_1 = \sigma'(R_1^+) 4\pi R_1^2 \quad ; \quad q'_2 = \sigma'(R_2^-) 4\pi R_2^2 = -q'_1.$$

5.9.1 Cálculo do potencial escalar ϕ pelo Método das Imagens

O método das imagens para a determinação de potenciais $V(\vec{r})$ originados por cargas na presença de condutores (e a respectiva densidade superficial de cargas induzidas em condutores) baseia-se na propriedade eletrostática que todas as superfícies condutoras devem coincidir com superfícies equipotenciais. Assim, em situações de geometria simples, é possível resolver algebricamente um

problema que em geral se apresenta na forma de uma equação de Poisson $\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_o}$ com condições fronteira $V(\vec{r}_i)|_{\partial C_i} = V_i$ sobre as superfícies dos condutores C_i .

Considerando por momentos a determinação do potencial eletrostático para duas esferas condutoras de raios a e c , cujos centros estão separados por uma distância d . A solução da equação de Poisson correspondente $\nabla^2 V = 0$ com condições-fronteira parametrizadas por ângulos $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ podem ser facilmente expressas em coordenadas cilíndricas $\{\rho, \phi, z\}$ quando ambos os centros das esferas estão sobre o eixo \vec{e}_z já que o potencial deve exibir uma simetria de rotação em torno desse eixo e $V(\vec{r}) = V(\rho, \vartheta)$ deve depender apenas de ρ e ϑ . Assim

$$V(a \sin(\vartheta), \varphi, a \cos(\vartheta)) = V_1 \quad ; \quad V(c \sin(\vartheta), \varphi, d + c \cos(\vartheta)) = V_2$$

Contudo é preciso notar que embora as equações diferenciais para o Laplaciano do potencial no espaço livre tenham soluções gerais muito simples usando separação de variáveis, esta técnica adapta-se mal a condições fronteira e estas equações são em geral extremamente difíceis de resolver com constrangimentos em duas fronteiras.

Estamos assim condicionados a usar algum artifício para resolver aproximadamente este problema. Podemos começar por assumir que uma das esferas tem uma distribuição uniforme de carga superficial, o que corresponde a considerar o seu campo como o de uma carga pontual q no seu centro \vec{r}_1 . Assim a distribuição de carga induzida na outra esfera pode ser determinada pelo método das imagens. Como demonstraremos a seguir, assumindo que a segunda esfera tem carga Q , então o campo das suas cargas superficiais comporta-se como sendo gerado por cargas-imagem pontuais

$$\begin{cases} q'_o = -\frac{a}{d}q & \text{localizada em } \vec{r}_2 + \vec{b}'_o \text{ onde } \vec{b}'_o = \left(\frac{a}{d}\right)^2 \vec{d} \\ q''_o = Q - q'_o & \text{localizada no seu centro } \vec{r}_2, \text{ portanto com } \vec{b}''_o = 0 \end{cases}$$

($\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ representa o vetor que une os centros das esferas). A carga-imagem q'_o é suficiente para garantir que a superfície da segunda esfera é uma equipotencial, e a colocação da carga q''_o no seu centro não perturba esse facto (as equipotenciais duma carga isolada são esferas centradas na carga) e apenas altera o valor da carga total na segunda esfera e o valor da equipotencial à superfície.

Contudo, estas cargas-imagem não preservam a superfície da primeira esfera como equipotencial, e para remediar isso torna-se necessário introduzir imagens destas cargas na primeira esfera de maneira que a sua carga q permaneça invariante e que a sua superfície seja uma equipotencial. As imagens das cargas q'_o e q''_o (se existir) são:

$$\begin{cases} q_1' = -\frac{c}{d-b_o} q'_o & \text{localizada em } \vec{r}_1 + \vec{b}'_1 \text{ onde } \vec{b}'_1 = -\left(\frac{c}{d-b_o}\right)^2 (\vec{d} - \vec{b}_o) \\ q_1'' = -\frac{c}{d} q''_o & \text{localizada em } \vec{r}_1 + \vec{b}''_1 \text{ onde } \vec{b}''_1 = -\left(\frac{c}{d}\right)^2 \vec{d} \\ q_1''' = -q_1' - q_1'' & \text{localizada no seu centro } \vec{r}_1, \text{ portanto com } \vec{b}_1''' = 0 \end{cases}$$

Isto resulta num efeito de deslocamento da carga efetiva no sentido da segunda esfera, e se $c < a$ então estas novas cargas são muito pequenas e devem ter muito fraco efeito sobre a segunda esfera. Claro que poderíamos continuar a adicionar alternadamente cargas-imagem a cada esfera para gradualmente tornar as suas superfícies verdadeiras equipotenciais (rigorosamente necessitaríamos de um número infinito de cargas para resolver este problema), mas esta é em geral uma boa aproximação.

Este problema tem uma variante interessante quando ambas as esferas estão ligadas por um fio condutor, formando assim um só condutor.

Enquanto estas cargas virtuais se distribuem num eixo de simetria é possível encontrar uma função $\mathcal{F}(x, y)$ no plano cuja linhas de nível sejam as linhas de campo \vec{E} nesse plano. De facto, tal como vimos anteriormente, embora V não seja mais uma função harmónica no plano, enquanto o campo elétrico estiver confinado a duas dimensões existe sempre um fator integrante $u(x, y)$ que torna exata a forma de Pfaff

$$\mathcal{M}(x, y) dx + \mathcal{N}(x, y) dy = -\frac{\partial V}{\partial y} dx + \frac{\partial V}{\partial x} dy$$

e nesse caso

$$d\mathcal{F}(x, y) = u(x, y) \left(\mathcal{M}(x, y) dx + \mathcal{N}(x, y) dy \right) \quad \therefore \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = u(x, y) \mathcal{M}(x, y) \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = u(x, y) \mathcal{N}(x, y) \end{cases}$$

Mostrámos já que em duas dimensões existe sempre um fator integrante $u(x, y)$. Em particular, se se verificar que

$$\frac{1}{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} \right) \equiv - \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = f(y)$$

então o fator integrante é

$$u(y) = e^{\int f(y) dy}$$

De forma análoga, se

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \right) \equiv - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = g(x)$$

então

$$u(x) = e^{\int g(x) dx}$$

Uma vez determinado $u(x, y)$ pode-se obter $\mathcal{F}(x, y)$ explicitamente integrando as equações

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = -u(x, y) \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = u(x, y) \frac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \quad (5.14)$$

Por exemplo, no caso em que $V(\vec{r})$ é gerado por n cargas q_i localizadas sobre a mesma linha em $\vec{r}_i = \{b_i, 0, 0\}$ teríamos, no plano $z = 0$,

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\sqrt{(x-b_i)^2 + y^2}}$$

As funções $\mathcal{M}(x, y)$ e $\mathcal{N}(x, y)$ são

$$\begin{cases} \mathcal{M}(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{y q_i}{((x-b_i)^2 + y^2)^{3/2}} \\ \mathcal{N}(x, y) = - \sum_{i=1}^n \frac{(x-b_i) q_i}{((x-b_i)^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Um cálculo simples leva-nos a deduzir

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{N}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, y)}{\partial y}}{\mathcal{M}(x, y)} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{3y^2 q_i}{(y^2 + (x-b_i)^2)^{5/2}} - \frac{q_i}{(y^2 + (x-b_i)^2)^{3/2}} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{3(x-b_i)^2 q_i}{(y^2 + (x-b_i)^2)^{5/2}} - \frac{q_i}{(y^2 + (x-b_i)^2)^{3/2}} \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{y q_i}{(y^2 + (x-b_i)^2)^{3/2}}} = \frac{1}{y}$$

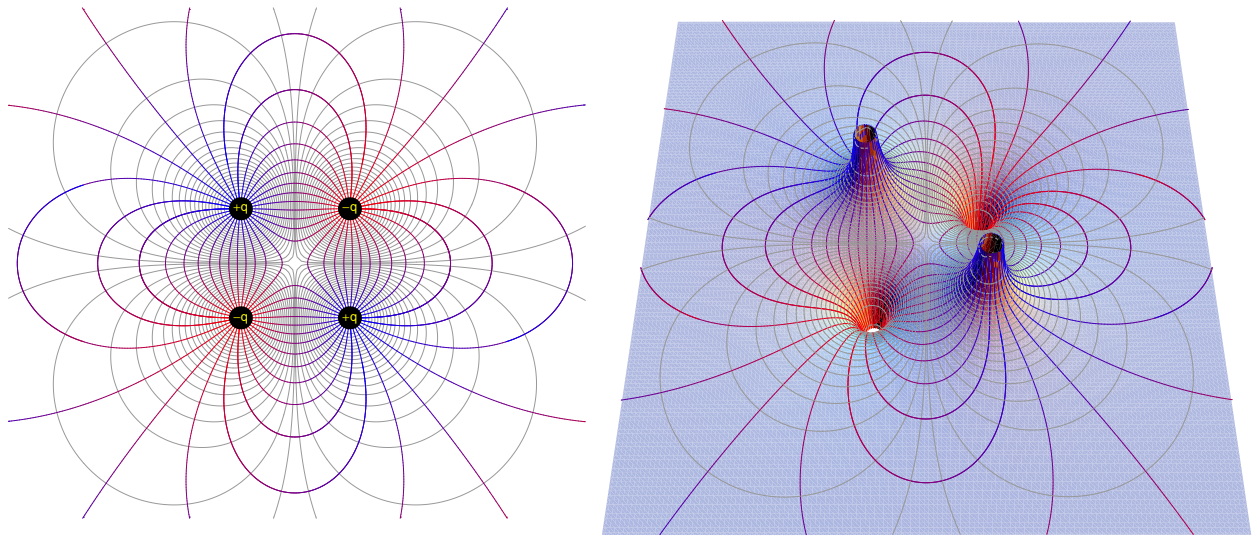


Figura 5.24: Linhas equipotenciais e de campo para o campo elétrico do quadrupolo no plano das cargas. Note-se que fora deste plano o campo deixa de ser bidimensional. Na figura à direita a terceira dimensão representa o valor do potencial V .

ou seja

$$u(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

A solução das equações (5.14) resulta em

$$\mathcal{F}(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{(x - b_i) q_i}{\sqrt{(x - b_i)^2 + y^2}}$$

para a função geradora das linhas de campo \vec{E} associado ao potencial das cargas q_i .

—CARGA PONTUAL NA VIZINHANÇA DE ESFERA CONDUTORA—

Num problema exemplo, dada uma esfera condutora descarregada de raio R e uma carga pontual exterior q , à distância d do centro da esfera, determine o campo elétrico \vec{E} e a carga induzida na esfera quando esta se encontra isolada, i.e. a carga superficial da esfera que, embora não esteja homogeneamente distribuída, tem uma soma total que se mantém constante e nula. Resolva ainda este problema quando a esfera se encontra ligada à Terra, i.e. quando a sua superfície se mantém ao potencial $V = 0$, pese embora o facto da sua carga total não se manter necessariamente constante.

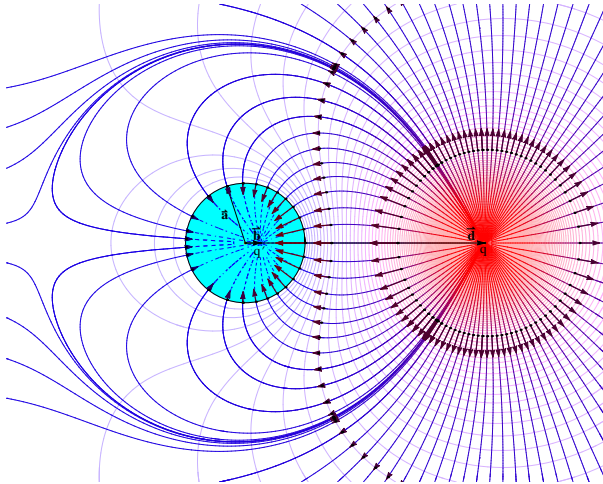


Figura 5.25: Linhas equipotenciais (cinzento) e linhas de campo para carga pontual positiva q na vizinhança de uma esfera condutora ligada à terra. Note-se que a densidade de carga induzida na esfera é negativa $\sigma_1(\vec{R}) = \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1$. A carga total da esfera ligada à terra ajusta-se até atingir o valor $q' = -\frac{R}{a} q$.

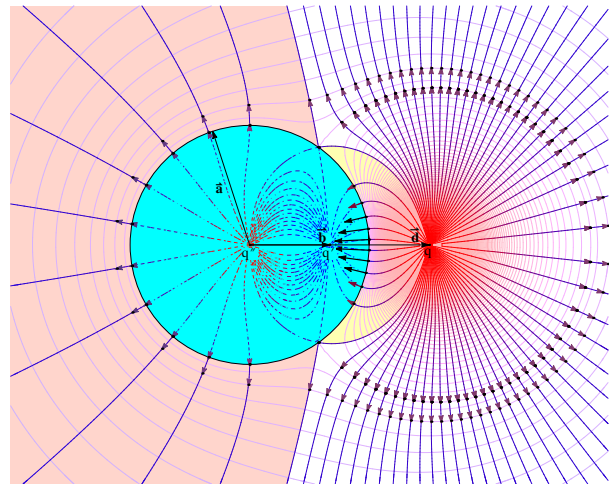


Figura 5.26: Linhas equipotenciais (cinzento) e linhas de campo para uma esfera condutora descarregada e isolada na presença de uma carga q na posição \vec{d} . As cargas virtuais q' (em \vec{b}) e $q'' = -q'$ (no centro) são escolhidas de forma a que a superfície esférica de raio a permaneça uma equipotencial e o condutor descarregado.

Resolve-se primeiro o problema com a esfera ligada à terra, i.e. com potencial $V(\vec{r}) = 0$ e carga total não nula. A inclusão de uma carga $q'' = -q'$ na origem resolve o problema quando a esfera não está ligada à terra e inicialmente descarregada, porque então a carga total da esfera não pode variar, e se inicialmente estava descarregada, assim tem que permanecer, porque o fluxo do campo através da superfície esférica de raio a tem que ser nulo. Por outro lado as superfícies equipotenciais do campo gerado por q'' são esféricas, pelo que a superfície do condutor continua a coincidir com uma equipotencial ao sobrepormos o potencial desta carga à solução do problema em que o condutor está ligado à terra.

Escolha-se a localização de uma carga 'imagem' q' na posição $\vec{a} = \lambda \vec{d}$ de forma que $V(\vec{r}) = 0$ quando $|\vec{r}| = R$, e designe-se por $k = \frac{q'}{q}$ a razão entre as cargas. Então $V(\vec{r})$ pode ser calculado através da expressão $V(\vec{r}) = V_q(\vec{r}) + V_{q'}(\vec{r})$, onde $V_q(\vec{r})$ e $V_{q'}(\vec{r})$ representam os potenciais respetivos para os campos elétricos gerados pelas cargas $Q = q$ e $Q = q' = kq$ nas posições $\vec{r}_q = \vec{d}$, $\vec{r}_{q'} = \vec{a}$ e

$$V_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|}$$

Quando pomos $V(\vec{r}) = 0$ obtemos o seguinte constrangimento

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta}} = -\frac{k}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}} \quad (5.15)$$

o que elevando ao quadrado resulta em

$$d^2 k^2 - a^2 + R^2(k^2 - 1) + 2R(a - dk^2) \cos \theta = 0.$$

Para que esta equação se verifique para todos os pontos da esfera, a dependência em θ deve anular-se, o que acontece se $a = dk^2$. Substituindo então este valor de b na equação obtém-se

$$(k^2 - 1)(d^2 k^2 - R^2) = 0 \quad (5.16)$$

com solução

$$k^2 = \frac{R^2}{d^2} \quad ; \quad a = \frac{R^2}{d}$$

A outra solução possível $k^2 = 1$ é trivial no sentido em que $\vec{b} = \vec{d}$ e $q' = -q$ e portanto $V(\vec{r}) \equiv 0$. As soluções com $k > 0$ não interessam porque apenas resolvem o quadrado da equação de constrangimento (5.16) mas não esta (5.15). Obtemos assim $q' = kq = -\frac{R}{d}q$ e

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}|} - \frac{R/d}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right)$$

e quando $\vec{r} = \vec{r}$, verifica-se $|\vec{r} - \vec{a}| = \frac{R}{d} |\vec{r} - \vec{d}|$.

$$\vec{E}_q = \frac{q (R\vec{e}_r - d\vec{e}_z)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{d}|^3} \quad ; \quad \vec{E}_{q'} = \frac{q' (R\vec{e}_r - a\vec{e}_z)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{a}|^3} \quad ; \quad \vec{E}_P = \frac{q(R^2 - d^2)\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 R |\vec{r} - \vec{d}|^3} \quad (5.17)$$

onde $\vec{E}_P = \vec{E}_q + \vec{E}_{q'}$. Uma vez que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ obtemos a densidade superficial de carga na esfera condutora

$$\sigma'(\vec{r}) = \vec{D} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 \vec{E}_P \cdot \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi R} \frac{(R^2 - d^2)}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} \quad (5.18)$$

SOLUÇÃO USANDO O MÉTODO DE IMAGENS

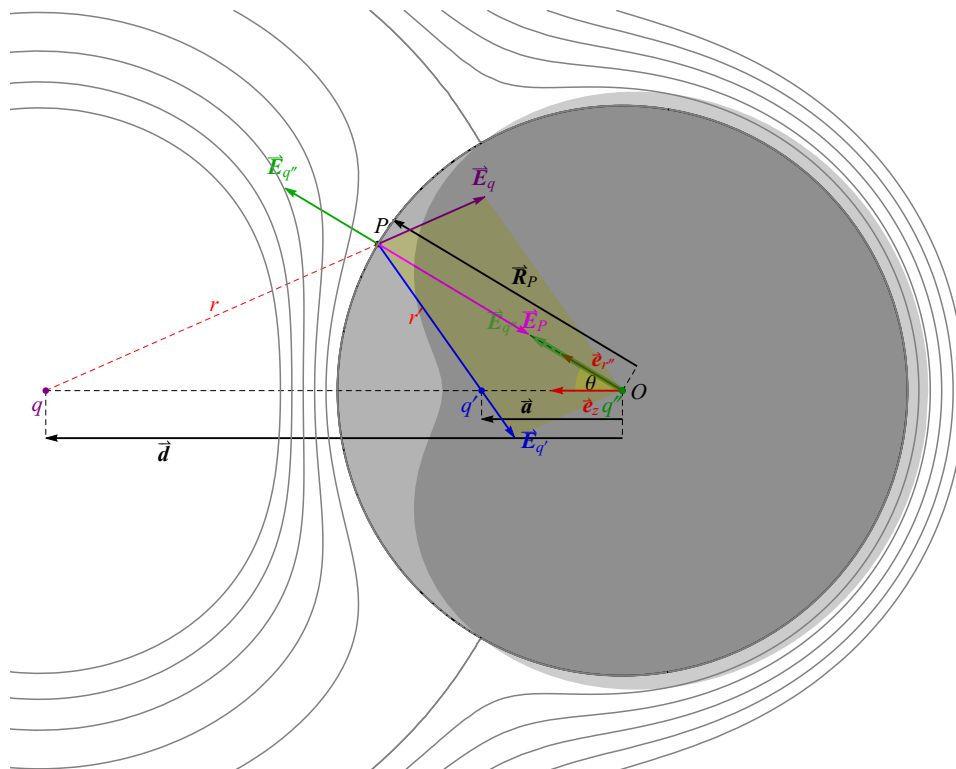


Figura 5.27: Densidade superficial de carga induzida $\sigma'(P) = \epsilon_o \vec{E}_P \cdot \vec{e}_{r''}$ numa esfera condutora descarregada de raio R à distância d de uma carga pontual q representada (em valor apenas) pela espessura radial da área a cinzento claro relativamente ao perfil da esfera (para dentro carga negativa, para fora positiva). A carga virtual $q' = -\frac{R}{d}q$ colocada na posição $a = \frac{R^2}{d}$ garante que a contribuição para o potencial conjunto das duas cargas na superfície esférica se mantém nula, e a carga virtual $q'' = -q'$ no centro da esfera garante que a esfera se mantém descarregada, enquanto o potencial à sua superfície permanece uma constante $V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q''}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{d}$.

Note-se que na imagem 5.27 o campo total \vec{E}_P resultante das cargas é normal à superfície da esfera em cada ponto P da mesma, como deve ser numa situação eletrostática, mas a componente tangencial de \vec{E}_q é cancelada apenas pela componente tangencial de $\vec{E}_{q'}$, pelo que o problema com uma esfera carregada tem a mesma componente de carga virtual q' , mas a carga no centro da esfera pode ser $q'' \neq -q'$. Além disso, pelo método de imagens apenas nos interessa o campo exterior à esfera, causado pelas cargas reais q e σ' , e que é reproduzido se substituirmos a distribuição contínua σ' de carga na superfície da esfera por cargas virtuais dentro desta. No interior da esfera o campo criado pelas cargas reais é nulo, mas o das cargas virtuais não, pelo que aí as equivalências terminam.

Uma forma expedita de encontrar os valores da posição e carga virtual neste problema é notar que, em eletrostática, o centro da esfera condutora deve estar ao mesmo potencial que todos os outros pontos do condutor até à superfície, uma vez que o campo elétrico se anula dentro dos condutores em equilíbrio. Se calcularmos o potencial $V'(O)$ no centro da esfera causado pelas cargas reais q e σ' obtemos

$$V'(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \iint_S \frac{\sigma'}{R} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q}{d} + \frac{1}{R} \iint_S \sigma' dS \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q}{d} + \frac{q'}{R} \right) \quad (5.19)$$

Assim, a condição $V'(O) = 0$ requer que a carga superficial induzida seja $q' = -\frac{R}{d}q$. Por outro lado, se calcularmos o potencial num ponto particular da superfície, causado pela carga real e a carga virtual q' à distância a do centro da esfera, obtemos escolhendo o ponto P da superfície na linha que une o centro da esfera à carga q ,

$$V'(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d-R} + \frac{q'}{R-a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(R^2-ad)}{d(d-R)(R-a)} = V'(O) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{R^2}{d} \quad (5.20)$$

— CÁLCULO DIRECTO DA DENSIDADE DE CARGA INDUZIDA —

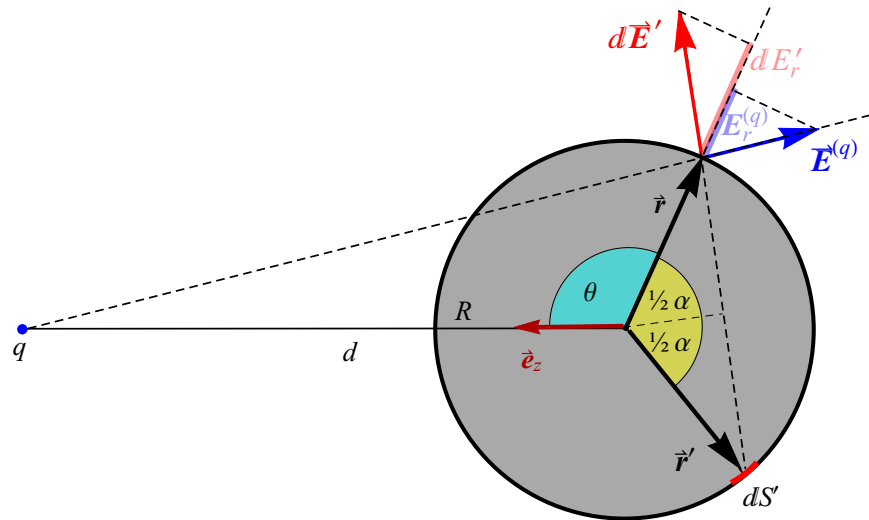


Figura 5.28: Cálculo directo do campo num ponto da superfície da esfera causado por cargas superficiais na esfera e por uma carga pontual q exterior à distância d do centro.

A contribuição para o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ num ponto P sobre a superfície S de um condutor esférico, das cargas aí distribuídas com densidade superficial $\sigma'(\vec{r}')$ é, usando um referencial com origem no centro da esfera e notando que $R \sin(\alpha/2) = \frac{1}{2} |\vec{r} - \vec{r}'|$

$$d\vec{E}'(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma' dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{32\pi\epsilon_0 R^3} \frac{\sigma' dS'}{\sin(\frac{\alpha}{2})^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.21)$$

onde α é o ângulo entre \vec{r} e \vec{r}' , ou seja $\vec{r} \cdot \vec{r}' = R^2 \cos(\alpha)$. Uma vez que o campo à superfície de um condutor em equilíbrio é normal a esta, apenas nos interessa a componente radial de $d\vec{E}'(\vec{r})$ em \vec{r} , ou seja usando $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{R}$ para pontos sobre a superfície da esfera,

$$dE'_r(\vec{r}) = d\vec{E}'(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{r}}{R} = \frac{1}{32\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\sigma'(\vec{r}') dS'}{\sin(\frac{\alpha}{2})^3} (1 - \cos(\alpha)) = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\sigma'(\vec{r}')}{\sin(\frac{\alpha}{2})} dS' \quad (5.22)$$

Somando todas as contribuições para dE'_r pelos possíveis dS' obtém-se, repondo $2R \sin(\frac{\alpha}{2}) = |\vec{r} - \vec{r}'|$,

$$E'_r(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 R} \iint_S \frac{\sigma'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' = \frac{1}{2R} \left(V'(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{d}|} \right) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}|} \quad (5.23)$$

uma vez que assumimos que $V'(r) = 0$. Sabendo que se deve ter

$$E_r^{(q)}(\vec{r}) + E_r'(r) = \frac{\sigma'(\vec{r})}{2\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{d}|^3} \left(\frac{(\vec{r}-\vec{d}) \cdot \vec{r}}{R} - \frac{|\vec{r}-\vec{d}|^2}{2R} \right) = \frac{\sigma'(\vec{r})}{2\epsilon_0} \quad (5.24)$$

já que $(\vec{r}-\vec{d}) \cdot \vec{r} = R^2 - \vec{d} \cdot \vec{r}$ e $|\vec{r}-\vec{d}|^2 = R^2 + d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{r}$ pelo que

$$\frac{R^2 - \vec{d} \cdot \vec{r}}{R} - \frac{R^2 + d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{r}}{2R} = \frac{R^2 - d^2}{2R} \quad (5.25)$$

Conclui-se assim que

$$\sigma'(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi R} \frac{(R^2 - d^2)}{|\vec{r}-\vec{d}|^3} \quad (5.26)$$

A carga induzida total na esfera condutora ligada à Terra é assim¹⁰

$$q' = \iint_S \sigma'(\vec{r}) dS = \frac{q(R^2 - d^2)}{4\pi R} \iint_S \frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}|^3} dS = -\frac{R}{d} q \quad (5.27)$$

No caso de uma esfera condutora isolada carregada com carga $Q = q' + q''$ então é possível de ver que

$$\sigma'' = \frac{q''}{4\pi R^2} = \frac{Q + \frac{R}{d}q}{4\pi R^2} \quad (5.28)$$

pelo que o potencial total na esfera condutora é

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + \frac{R}{d}q}{R} \quad (5.29)$$

e a densidade superficial

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma'(\vec{r}) + \sigma'' \quad (5.30)$$

¹⁰ Em coordenadas esféricas, com $\vec{r} = R\vec{e}_r$ e $\vec{d} = d\vec{e}_z$ onde $d > R$,

$$\iint_S \frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}|^3} dS = \frac{4\pi R^2}{d(d^2 - R^2)}$$

já que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 \sin(\theta)}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos(\theta))^{3/2}} d\theta d\varphi &= \int_{-1}^1 \frac{2\pi R^2}{(R^2 + d^2 - 2Rd\xi)^{3/2}} d\xi = \\ &= \frac{4\pi R^2}{2Rd\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd}} - \frac{4\pi R^2}{2Rd\sqrt{R^2 + d^2 + 2Rd}} = \frac{2\pi R}{d} \left(\frac{2R}{d^2 - R^2} \right) \end{aligned}$$

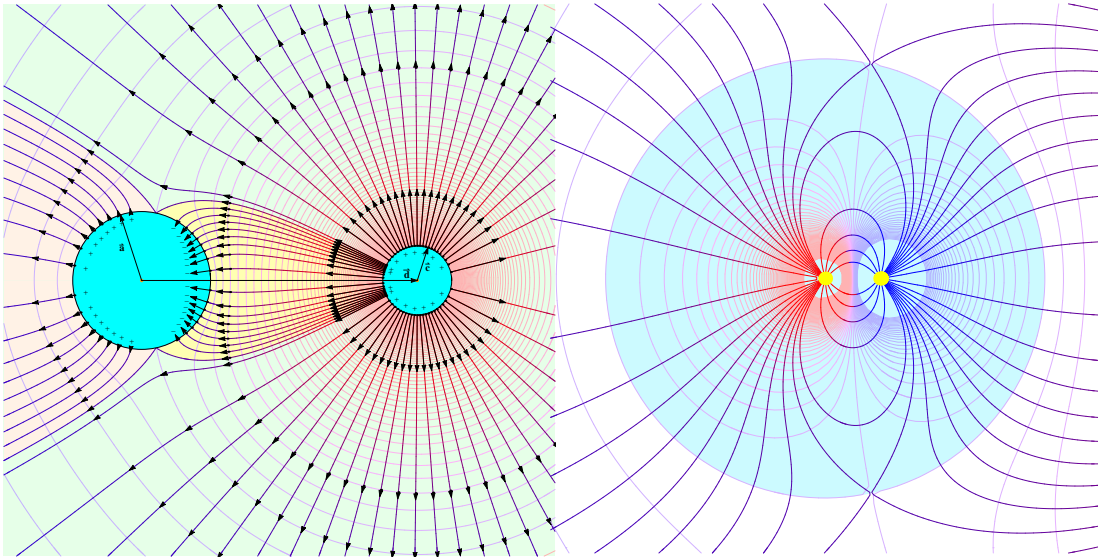


Figura 5.29: Campo e cargas induzidas entre duas esferas condutoras isoladas, a da esquerda neutra.

Figura 5.30: Detalhe do campo fictício no interior da esfera condutora devido às cargas-imagem.

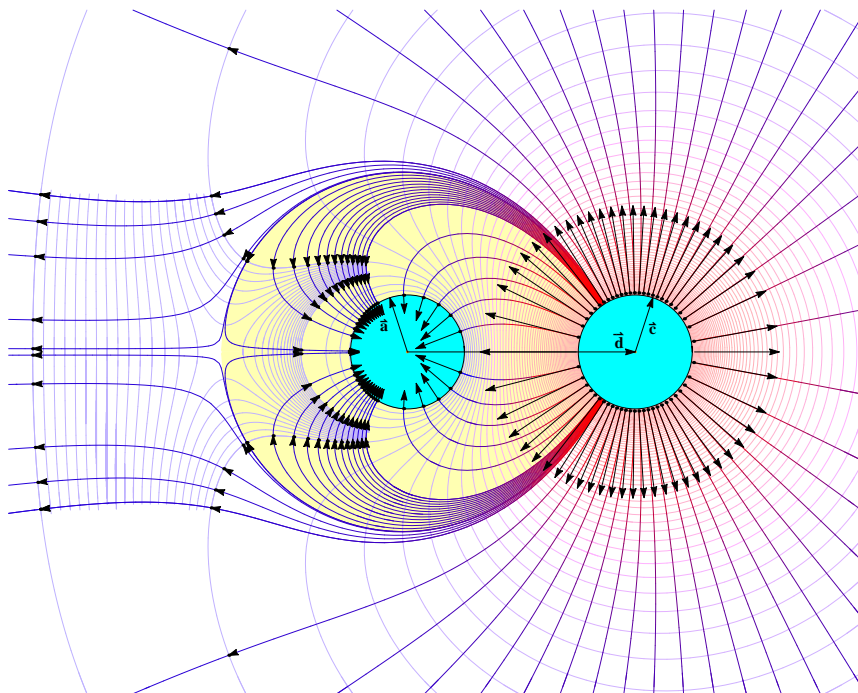


Figura 5.31: Linhas de campo e equipotenciais para duas esferas condutoras idênticas, uma das quais ligada à terra. Note-se que a carga desta esfera é apenas uma fração da carga da esfera isolada, correspondendo à região colorida em que as linhas de campo terminam na esfera com terra.

— CAMPO ELÉTRICO NUMA CAVIDADE ESFÉRICA COM UMA CARGA q DESCENTRADA. —

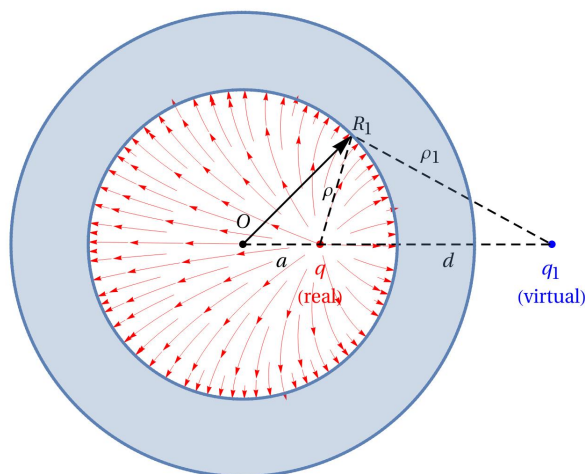


Figura 5.32: Pelo método das imagens, o potencial no interior é a soma dos potenciais da carga real q e duma carga virtual $q' = -\frac{R}{a}$ colocada à distância $d = \frac{R^2}{a}$ do centro da esfera na direção de \vec{e}_z .

Solução pela Equação de Poisson (método de elementos finitos MEF)

Em coordenadas esféricas $\{r, \theta, \varphi\}$ o laplaciano do potencial eletrostático ϕ escreve-se

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Contudo o problema pode ser descrito por apenas duas coordenadas cilíndricas $\{\rho, z\}$ em qualquer plano que passe pelo eixo \vec{e}_z , definido pela reta formada pelo centro da esfera e a posição da carga q . Por simetria o potencial $\phi(\vec{r})$ dentro da cavidade não pode depender do ângulo azimutal φ , pelo que devemos ter $\phi(\vec{r}) = \phi(\rho, z)$.

O laplaciano em coordenadas cilíndricas não é igual ao de coordenadas cartesianas.

— Em coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi(\rho, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

— Em coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 \phi(x, z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Em duas dimensões "cartesianas" $\{\rho, z\}$ o gradiente de $\phi(\rho, z)$ tem a mesma expressão que as componentes não-nulas do gradiente em coordenadas cilíndricas.

$$\nabla \phi(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\nabla\phi(\rho, z) \Big|_{\mathbb{R}^2} = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \vec{e}_\rho + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Contudo a divergência do gradiente não é igual ao Laplaciano pretendido se usarmos as coordenadas cartesianas. É preciso adicionar um termo extra para usar como Laplaciano na equação de Poisson. A expressão do operador diferencial a aplicar ao potencial $\phi(\rho, z)$ é assim em \mathbb{R}^2 com coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2\phi(\rho, z) \Big|_{\mathbb{R}^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

Esta equação pode ser numericamente resolvida usando o MEF com condições de Dirichlet

$$\begin{cases} \phi(\rho, z) = 0 & (\rho^2 + z^2 = R_1^2) & \text{Equipotencial na superfície interna da cavidade} \\ \phi(\rho, z) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0\delta} & (\rho^2 + (z-a)^2 = \delta^2) & \text{Equipotencial muito perto da carga pontual } (\delta \ll d-a) \end{cases}$$

5.10 Solução exata pelo método de imagens

Pelo método das imagens, o potencial no interior é a soma dos potenciais da carga real q e duma carga virtual $q' = -\frac{R_1}{a}$ colocada à distância $d = \frac{R_1^2}{a}$ do centro da esfera na direção de \vec{e}_z .

— Em coordenadas esféricas

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos(\theta) + r^2}} - \frac{R_1}{a\sqrt{d^2 - 2dr\cos(\theta) + r^2}} \right)$$

— Em coordenadas cilíndricas

$$\phi(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(a-z)^2 + \rho^2}} - \frac{R_1}{a\sqrt{(d-z)^2 + \rho^2}} \right)$$

PROBLEMAS RESOLÚVEIS COM O MÉTODO DE IMAGENS

- Carga em frente a Plano Infinito
- Carga em canto formado por semiplanos condutores infinitos
- Linha de Cargas em frente a Plano Infinito

5.10.1 Apêndice Matemático: Operador Divergência

5.10.1.1 Em Coordenadas Cartesianas

$$\nabla \cdot \vec{D} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (D_x \vec{e}_x + D_y \vec{e}_y + D_z \vec{e}_z) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

5.10.1.2 Em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Em \mathbb{R}^3 com coordenadas curvilíneas $\{x^1, x^2, x^3\}$ e funções de escala η_1, η_2, η_3 obtemos

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{3! \eta_i \eta_j \eta_k} \frac{\partial(\eta_j \eta_i D_k)}{\partial x^k}$$

5.10.2 Apêndice Matemático: Operador Laplaciano $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$ **5.10.2.1 Em Coordenadas Cartesianas**

$$\nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

5.10.2.2 Em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Sendo a divergência dum vetor

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{3!} \frac{\varepsilon^{kji}}{\eta_i \eta_j \eta_k} \frac{\partial(\eta_j \eta_i A_k)}{\partial x^k}$$

se escolhermos $\vec{A} = \nabla f = \frac{1}{\eta_k} \frac{\partial f}{\partial x^k} \vec{e}_k$ então pela definição $\nabla^2 f = \nabla \cdot \vec{A}$,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{3!} \frac{\varepsilon^{kji}}{\eta_i \eta_j \eta_k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\eta_j \eta_i}{\eta_k} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

5.10.3 Equação de Poisson: $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ **5.10.3.1 Equação da Continuidade Geral**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} + \mathcal{G} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ Densidade volúmica da grandeza } Z \\ \vec{J} \text{ Densidade de Corrente da grandeza } Z \\ \mathcal{G} \text{ Taxa de criação de } Z \text{ por unidade de volume devido a fontes.} \end{array} \right.$$

5.10.4 Problemas potenciais em outras áreas:

Analogias: as mesmas equações têm as mesmas soluções.

—EQUAÇÃO PARA A TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM GERAÇÃO ENERGIA—

- Equação da Continuidade :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = \mathcal{G} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \text{Densidade de Energia Armazenada;} \\ \vec{J} = \text{Densidade de Fluxo de Energia Térmica;} \\ \mathcal{G} = \text{Densidade de Energia gerada por unidade de tempo;} \end{array} \right.$$

- Equação de Fourier :

$$\vec{J} = -\kappa \nabla T \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \text{Temperatura;} \\ \kappa = \text{Condutividade Térmica;} \end{array} \right.$$

- Capacidade Calorífica:

$$du = C dT \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \text{Calor Específico} \end{array} \right.$$

- Equação do Calor :

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + \mathcal{G}$$

■ **Exemplo 5.4 — Calor produzido numa tubagem de comprimento L e raio a , mantida à temperatura T_1 , isolada por um material de condutividade térmica κ e raio b , com a superfície exterior mantida à temperatura T_2 (regime estacionário).**

Em regime estacionário tem-se $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Então a equação do calor é

$$\nabla^2 T = -\frac{\mathcal{G}}{\kappa}$$

Este problema é idêntico ao da determinação da densidade linear de carga λ armazenada nas armaduras de um condensador coaxial com a mesma geometria e mantido a uma diferença de potencial $V_2 - V_1$. Nesse caso as equações determinantes eram

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V = -\frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

e as respetivas soluções são

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G} = 2\pi\kappa \frac{T_1 - T_2}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

■

■ **Exemplo 5.5 — Distribuição de Temperatura na vizinhança de uma fonte pontual \mathcal{G} , enterrada num meio de condutividade térmica κ a uma profundidade d da superfície plana.**

Assuma-se que não há condução de calor no sentido normal à superfície i.e. $\nabla T \cdot \vec{n} = 0$. Pondo $\vec{r}_{\pm} = \vec{r} \pm d\vec{n}$, então para $\vec{r} = \vec{s}$ à superfície, $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ e portanto $r_{\pm} = \sqrt{s^2 + d^2}$, este problema é idêntico (i.e. a mesma distribuição de cargas e condições fronteira) ao da determinação do potencial para duas cargas iguais Q à distância $2d$. A solução das respetivas equações de Poisson deve ser a idêntica, e no caso elétrico usando o método de imagens obtivemos

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{\mathcal{G}}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)$$

$$\text{Verificação: } \left(\vec{J} \cdot \vec{n} \right)_{z=0} = -\kappa \vec{n} \cdot \nabla T = -\frac{\mathcal{G}}{4\pi} \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)_{z=0} = \frac{\mathcal{G}}{4\pi} \frac{2\vec{s} \cdot \vec{n}}{(d^2 + s^2)^{3/2}} \equiv 0$$

■

5.10.4.1 Método de Separação de Variáveis para Equação de Laplace

- O campo do Condensador plano

5.10.5 Solução Geral da Equação de Laplace para cargas em condutores.

5.10.5.1 Coeficientes de Potencial p_{ij} .

Em geral, dada uma distribuição de N condutores no espaço, a especificação das cargas Q_i determina univocamente o potencial $V(\vec{r})$ devido à linearidade das equações de Poisson, e conseqüentemente determina igualmente o potencial V_i a que cada condutor se encontra. Assim sendo, por razões de simetria é possível mostrar que existem $\frac{N^2-N}{2} + N = \frac{1}{2}N(N+1)$ coeficientes de potencial p_{ij} tais que

$$V_j = \sum_{i=1}^N p_{ij} Q_i \quad (p_{ii} \geq p_{ij} > 0; p_{ij} = p_{ji})$$

Os coeficientes de potencial p_{ij} apenas dependem de fatores geométricos pelo que para os determinar são necessárias N condições iniciais geralmente indicando que todos os condutores têm carga nula $Q_j = 0$, exceto um que tem carga $Q_i \neq 0$. Nessa situação, $V_i = \frac{Q_i}{C_i} = p_{ii} Q_i$ donde

$$p_{ii} = \frac{1}{C_i} \quad \text{e em geral} \quad V_k = \sum_{i=1}^N p_{ik} Q_i$$

5.11 Condensadores e Capacidade

5.11.1 Coeficientes de Capacidade (*Farad*)

A matriz formada pelos coeficientes de potencial $[p_{ij}]$ tem sempre uma inversa $[c_{ij}] = [p_{ij}]^{-1}$, cujas entradas são os coeficientes de capacidade que resolvem o problema inverso de determinar as cargas uma vez dados os potenciais V_i à superfície dos condutores.

$$Q_j = \sum_{i=1}^N c_{ij} V_i$$

- Capacidade de um condensador com carga Q e queda de potencial $\mathcal{V} = -\Delta V$ nas armaduras:

$$C = \frac{Q}{\mathcal{V}} \quad (F = \text{Farad})$$

5.11.1.1 Condensador esférico $Q_1 = -Q_2 = Q$

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 + V_\infty \\ V_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 + V_\infty \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = V_1 - V_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12}) Q \quad \therefore \quad C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

Exercício 5.7 DUAS ESFERAS CONDUTORAS

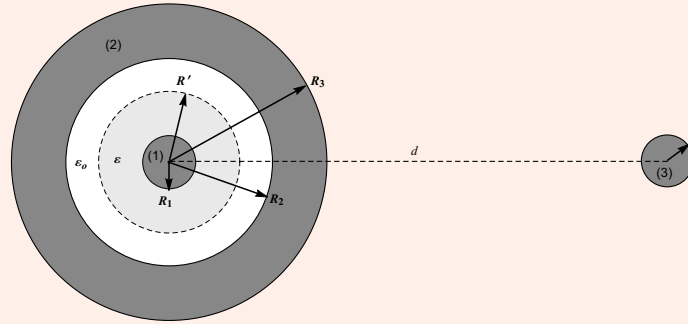


Figura 5.33: Coeficientes de Capacidade para duas esferas condutoras próximas.

A figura representa um condensador esférico e um condutor exterior (3) também esférico. O condensador é constituído por um condutor interior (1) de raio $R_1 = 2\text{ cm}$ e por uma coroa esférica (2) de raios $R_2 = 8\text{ cm}$ e $R_3 = 12\text{ cm}$, sendo o espaço entre armaduras preenchido por um dielétrico LHI de permitividade relativa $\epsilon_r = 3$, entre R_1 e $R' = 4\text{ cm}$, e por vácuo no espaço restante. O condutor exterior (3) tem de raio $R = 1\text{ cm}$ e está situado a uma distância $d = 30\text{ cm}$ do centro do condensador. Sabendo que as armaduras do condensador estão carregadas com $q_1 = 2\text{ nC}$ (interior) e $q_2 = 1\text{ nC}$ (exterior) e que o condutor exterior tem a carga $q = 3\text{ nC}$, determine:

- A diferença de potencial elétrico entre as armaduras do condensador.
- As densidades de carga de polarização no dielétrico e a pressão eletrostática exercida na superfície interior da armadura exterior do condensador.
- O potencial da armadura exterior do condensador e o potencial do condutor esférico exterior.

Dado: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ F}^{-1}\text{m}.$

Resposta 5.7

- a) Considerando uma superfície esférica genérica de raio r , com $R_1 < r < R_2$, e aplicando o teorema de Gauss, escrito em termos do vetor \vec{D} , obtém-se

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = q_1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{D}| 4\pi r^2 = q_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{q_1}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

Os campos elétricos em $R_1 < r < R'$ e $R' < r < R_2$ são então, respetivamente

$$\vec{E}_1^e = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r \quad ; \quad \vec{E}_2^e = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

A diferença de potencial entre armaduras é portanto

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R'} E_1^e(r) dr + \int_{R'}^{R_2} E_2^e(r) dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Substituindo valores numéricos, obtém-se

$$V_1 - V_2 = \frac{9 \times 10^9}{3} \times 2 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \times 10^2 + 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \times 10^2 = 375\text{ V}$$

- b) Como o dielétrico é LHI e não se encontra eletrizado ($\rho = 0$) tem-se $\rho' = 0$. No respeitante à densidade de carga de polarização em superfície, obtém-se

$$\sigma'_1(R_1^+) = (\vec{P} \cdot \vec{n}_{ext})(R_1^+) = \epsilon_o \chi_e \vec{E}^e(R_1^+) \cdot (-\vec{e}_r) = -(\epsilon_r - \epsilon_o) \frac{q_1}{4\pi\epsilon R_1^2} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q_1}{4\pi R_1^2}$$

Dado que $q'_1 + q'_2 = 0$, tem-se em R'^-

$$\sigma'_2(R'^-) = -\frac{R_1^2}{R'^2} \sigma'_1(R_1^+) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q_1}{4\pi R'^2}$$

A pressão eletrostática na superfície interior da armadura exterior do condensador tem o valor

$$\vec{p}^e(R_2^-) = \frac{1}{4\pi R_2^2} (-q_1) \frac{1}{2} \vec{E}^e(R_2^-) = -\frac{1}{4\pi R_2^2} \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_o R_2^2} \vec{e}_r = -\frac{(\sigma_2^{int})^2}{2\epsilon_o} \vec{e}_r$$

com $\sigma_2^{int} = -\frac{q_1}{4\pi R_2^2}$ a densidade de carga na superfície interior da armadura (2). Este resultado pode obter-se também a partir da energia do condensador

$$\vec{p}^e = \frac{1}{4\pi R_2^2} \left(-\frac{\partial W_e}{\partial R_2} \right)_{q=C\epsilon} \vec{e}_r$$

onde $W_e = \frac{1}{2} q_1 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C}$, onde pela regra de associação de condensadores em série,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Tem-se assim

$$\vec{p}^e = -\frac{1}{4\pi R_2^2} \frac{q_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{1}{C} \right) \vec{e}_r = -\frac{1}{4\pi R_2^2} \frac{q_1^2}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(-\frac{1}{R_2} \right) \vec{e}_r = -\frac{1}{4\pi R_2^2} \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_o R_2^2} \vec{e}_r$$

que é o resultado anterior.

- c) O potencial elétrico no centro do condutor (1) é dado por (assumindo $R \ll d$ para a contribuição de $q_3 = q$.)

$$V_1 = V_1(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q_1 + q'_1}{R_1} + \frac{q'_2}{R'} - \frac{q_1}{R_2} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \iint_{S_2^{ext}} \frac{\sigma_2^{ext}}{R_3} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_3}{d}$$

Embora a distribuição σ_2^{ext} na superfície exterior da armadura (2) não seja uniforme podemos afirmar que $\iint_{S_2^{ext}} \sigma_2^{ext} dS = q_1 + q_2$, e o primeiro termo da expressão anterior é $V_1 - V_2$, pelo que podemos escrever

$$V_1 = (V_1 - V_2) + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1 + q_2}{R_3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_3}{d}$$

Assim o potencial na armadura exterior deve ser

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1 + q_2}{R_3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_3}{d} = 9 \times 10^9 \times \frac{3 \times 10^{-9}}{12 \times 10^{-2}} + 9 \times 10^9 \times \frac{3 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-1}} = \\ &= \frac{9}{4} \times 10^2 + 9 \times 10 = 225 + 90 = 315 \text{ V} \quad (5.31) \end{aligned}$$

Utilizando os coeficientes de potencial $p_{ij} = p_{ji}$ para exprimir a relação entre potenciais e cargas em condutores, temos

$$V_1 = p_{11} q_1 + p_{12} q_2 + p_{13} q_3$$

e verificamos da expressão obtida acima para V_1 que o coeficiente $p_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o d}$. De forma análoga, da expressão obtida para V_2 e de

$$V_2 = p_{21} q_1 + p_{22} q_2 + p_{23} q_3$$

se conclui que $p_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d}$. Para o condutor exterior (3) podemos também escrever

$$V_3 = p_{31} q_1 + p_{32} q_2 + p_{33} q_3$$

onde já obtivemos $p_{31} = p_{13}$, $p_{32} = p_{23}$ e podemos estimar que $p_{33} \approx \frac{1}{C_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}$, devido à distância $d \gg R_3$. Tem-se assim

$$\begin{aligned} V_3 &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} (q_1 + q_2) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} q_3 = \frac{9 \times 10^9}{3 \times 10^{-1}} \times 3 \times 10^{-9} + \frac{9 \times 10^9}{10^{-2}} \times 3 \times 10^{-9} = \\ &= 90 + 27 \times 10^2 = 2790 \text{ V} \quad (5.32) \end{aligned}$$

COMPLEMENTO DE RESOLUÇÃO

Note-se que se subtrairmos a componente homogénea $\frac{q_1 + q_2}{4\pi R_3^2}$ à densidade exterior

$$\sigma_2^{ext} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi R_3^2} + \sigma_2^{ind} \quad (5.33)$$

obtemos o termo σ_2^{ind} devido à indução da carga exterior, tal que

$$\oiint_{S_2^{ext}} \sigma_2^{ind} dS = 0 \quad (5.34)$$

Tendo em conta que

$$r = \sqrt{d^2 + R_3^2 + 2dR_3\xi}$$

com $\xi = -\cos(\theta)$, obtemos

$$dr = \frac{R_3 d}{r} d\xi$$

donde

$$d\xi = \frac{r}{R_3 d} dr$$

e em S_2^{ext} tem-se

$$dS = R_3^2 d\phi d\xi = \frac{R_3}{d} r d\phi dr$$

Assim

$$\oiint_{S_2^{ext}} \frac{1}{r} dS = 2\pi \frac{R_3}{d} \int_{d-R_3}^{d+R_3} dr = \frac{4\pi R_3^2}{d} \quad (5.35)$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} V_3 = p_{31} q_1 + p_{32} q_2 + p_{33} q_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S_2^{ext}} \frac{\sigma_2^{ext}}{r} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{R} = \\ &= \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S_2^{ext}} \frac{\sigma_2^{ind}}{r} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} q_3 \quad (5.36) \end{aligned}$$

e uma vez que $p_{31} = p_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d}$, concluímos que o coeficiente de potencial

$$p_{33} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{q_3} \oiint_{S_2^{ext}} \frac{\sigma_2^{ind}}{r} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (5.37)$$

e como este não pode depender de q_3 , deve-se ter

$$\oiint_{S_2^{ext}} \frac{\sigma_2^{ind}}{r} dS = 2\pi \frac{R_3}{d} \int_{d-R_3}^{d+R_3} \sigma_2^{ind} dr = \beta q_3 \quad (5.38)$$

com β um fator geométrico. Numa aproximação de 1ª ordem (usando o método das imagens virtuais) é possível mostrar que

$$\sigma_2^{ind} = \frac{q_3}{4\pi R_3} \left(\frac{1}{d} - \frac{d^2 - R_3^2}{r^3} \right) \quad (5.39)$$

a qual verifica como esperado

$$\begin{aligned} \oiint_{S_2^{ext}} \sigma_2^{ind} dS &= q_3 \left(\frac{R_3}{d} - \frac{d^2 - R_3^2}{2d} \int_{d-R_3}^{d+R_3} \frac{1}{r^2} dr \right) = \\ &= q_3 \left(\frac{R_3}{d} - \frac{d^2 - R_3^2}{2d} \left(\frac{1}{d-R_3} - \frac{1}{d+R_3} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

O valor do integral em p_{33} obtém-se de

$$\begin{aligned} \oiint_{S_2^{ext}} \frac{\sigma_2^{ind}}{r} dS &= 2\pi \frac{R_3}{d} \int_{d-R_3}^{d+R_3} \sigma_2^{ind} dr = q_3 \left(\frac{R_3}{d^2} - \frac{d^2 - R_3^2}{2d} \int_{d-R_3}^{d+R_3} \frac{1}{r^3} dr \right) = \\ &= q_3 \left(\frac{R_3}{d^2} - \frac{d^2 - R_3^2}{4d} \left(\frac{1}{(d-R_3)^2} - \frac{1}{(d+R_3)^2} \right) \right) = \\ &= q_3 \left(\frac{R_3}{d^2} - \frac{R_3}{d^2 - R_3^2} \right) = -\frac{R_3^3}{d^2(d^2 - R_3^2)} q_3 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Assim o erro relativo da aproximação $p_{33} \approx \frac{1}{C_3}$ é de -0.25% já que

$$p_{33} = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \left(\frac{1}{R} + \frac{R_3}{d^2} - \frac{R_3}{d^2 - R_3^2} \right) = \frac{1}{4\pi \epsilon_o R} \left(1 - \frac{RR_3^3}{d^2(d^2 - R_3^2)} \right) = \frac{1}{C_3} (1 - 0.0025) \quad (5.42)$$

e o potencial estimado $V_3 = 2790V$ tem $6.8V$ em excesso.

5.12 Energia Eletrostática em Condensadores

A energia potencial eletrostática duma carga q é o trabalho realizado para deslocar a carga num campo exterior $\vec{E} = -\nabla V$, desde o infinito para a sua posição final sem lhe atribuir outras formas de energia (e.g. cinética):

$$U_q^{ext} = \int_{\vec{r}_\infty}^{\vec{r}_f} q \vec{E} \cdot d\vec{r} = q(V_\infty - V_f) = q\mathcal{V}$$

Para uma distribuição discreta de cargas é necessário adicionar a esta energia potencial U^{ext} num campo exterior a energia U_{ij} despendida em trabalho realizado contra os campos \vec{E}_j das cargas $j < i$ que já estão presentes na sua posição final, assumindo que cada carga i é trazida individualmente desde o infinito.

$$U = \sum_{i=1}^N U_i^{ext} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{j-1} U_{ij} = U^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N U_{ij} = U^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \mathcal{V}_j$$

Note que pelo princípio de sobreposição, a ordem por que as cargas são trazidas para a sua posição final é irrelevante, pelo que este valor é único e bem definido. Assim o trabalho $U_{ij} = U_{ji}$, e

$U_{ii} = U_{jj} = 0$ (uma carga não precisa em princípio realizar trabalho para se deslocar no seu próprio campo), pelo que na soma sem restrições $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N U_{ij}$ o termo relativo a cada par de cargas r, s contribui duas vezes, uma vez como U_{rs} e outra vez como U_{sr} , daí a necessidade de introduzir o fator $\frac{1}{2}$.

5.12.1 Energia de uma distribuição discreta de cargas

A energia de uma distribuição discreta de cargas pode ser obtida **trazendo uma a uma as cargas do infinito** para a sua posição final no campo das que já lá se encontram.

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N Q_j V_j$$

Energia potencial é o trabalho para deslocar uma carga Q contra um campo de forças $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ sem lhe atribuir outras formas de energia (e.g. cinética):

$$U = \int_{\infty, f} (-\vec{F}_e) \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty, f} Q\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = Q(\varphi_f - \varphi_\infty) = QV_f$$

Se U_{ij} é a energia potencial da carga Q_i no campo da carga Q_j e $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ então

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} = U_{ji}$$

Um conjunto de N cargas terá energia total

$$U_e = U_{21} + (U_{31} + U_{32}) + (U_{41} + U_{42} + U_{43}) + \dots = \sum_{j=2}^N \left(\sum_{i=1}^{j-1} U_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N U_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N Q_j V_j$$

onde

$$V_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_{ij}}$$

é a tensão final na posição da carga Q_j .

5.12.2 Energia de um sistema de N condutores carregados

A generalização da expressão anterior para condutores carregados em equilíbrio electrostático é, dado que as cargas se encontram à superfície dos condutores, com densidades superficiais σ_i , superfícies essas que são equipotenciais,

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \sigma_i V_i dS_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i \iint_{S_i} \sigma_i dS_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i Q_i$$

5.12.3 Energia de uma distribuição contínua de cargas.

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\mathfrak{V}} \rho_c V d\mathfrak{V}$$

5.13 Densidade de Energia Electrostática

De acordo com a expressão generalizada para a energia de uma distribuição contínua de cargas livres com densidade $\rho_c(\vec{r})$ num campo potencial $\varphi(\vec{r})$, podemos generalizar as expressões anteriores para a energia U_e

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\mathfrak{V}} \rho_c V d\mathfrak{V}$$

onde $V(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_o)$ para \vec{r}_o um ponto de referência comum fixo. (Geralmente $\vec{r}_o = \infty$ para distribuições finitas de cargas, e $\varphi_\infty = 0$ pelo que $V(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$, mas para distribuições infinitas de cargas, como um fio infinito uniformemente carregado onde $\varphi_\infty = \infty$, \vec{r}_o tem que ser escolhido doutra forma.)

A lei de Gauss por outro lado indica que $\rho_c = \nabla \cdot \vec{D}$ pelo que

$$\rho_c V = \nabla \cdot (\vec{D} V) = \nabla \cdot (V \vec{D}) - \vec{D} \cdot \nabla V = \nabla \cdot (V \vec{D}) + \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Assim obtemos da expressão geral

$$U_e = \iiint_V \rho_c V dV = \iiint_S V \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

No caso em que o campo se estende até ao infinito o primeiro integral anula-se porque S cresce com r^2 mas o integrando decresce com r^{-3} . Assim, designado a **densidade de energia eletrostática** por

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \equiv \frac{1}{2\varepsilon} D^2$$

podemos escrever no vazio

$$U_e = \iiint_V u_e dV \equiv \iiint_V \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} dV \equiv \iiint_V \frac{1}{2} \varepsilon_o E^2 dV \quad (5.43)$$

5.13.1 Densidade de Energia num condensador plano de área A e separação d

Relembrando que a capacidade dum condensador plano é $C = \frac{\varepsilon_o A}{d}$, a sua energia armazenada quando a diferença de potencial é V será $U_c = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_o A}{d} V^2$.

A densidade de energia por unidade de volume pode ser escrita em termos do campo elétrico \vec{E} entre as armaduras:

$$u_c = \frac{U_c}{Ad} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{CA d} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_o A^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_o E^2$$

5.13.2 Condensador cilíndrico e comprimento L

$$U_c = \iiint_{cil} \frac{1}{2} \varepsilon_o E(r)^2 dV = \pi \varepsilon_o L \left(\frac{Q}{2\pi \varepsilon_o L} \right)^2 \int_{R_i}^{R_e} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2} \left(\frac{\log\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi \varepsilon_o L} \right) Q^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

5.13.3 Condensador esférico de raios R_i e R_e

$$U_c = \iiint_{esf} \frac{1}{2} \epsilon_o E(r)^2 dV = 2\pi \epsilon_o \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_o} \right)^2 \int_{R_i}^{R_e} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}}{4\pi \epsilon_o} \right) Q^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

5.13.4 Trabalho Realizado para carregar um Condensador de Capacidade C

A energia potencial electrostática duma carga q é o trabalho realizado para deslocar a carga num campo exterior $\vec{E} = -\nabla\phi$ desde o infinito para a sua posição final sem lhe atribuir outras formas de energia (por exemplo cinética). A força electrostática mínima que atua na carga é

$$\vec{F} = q\vec{E} = -\vec{F}^{ext}$$

$$U_q^{ext} = \int_{\infty \rightarrow f} \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty \rightarrow f} q \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q(\phi_f - \phi_\infty) = qV$$

No caso dum condensador, a tensão V depende da carga q existente na armadura, por isso a energia necessária para retirar carga infinitesimal dq da armadura negativa e levá-la para a positiva vencendo a tensão $V(q) = \frac{q}{C}$ é

$$dU = V dq = \frac{q}{C} dq$$

O processo de carga de um condensador de capacidade C até armazenar uma carga Q na sua armadura positiva requer a realização de trabalho contra a tensão que entretanto se vai estabelecendo entre as armaduras, e que termina tendo o valor $V = \frac{Q}{C}$. A energia electrostática armazenada é

$$U_c = \int_0^{U_c} dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \equiv \frac{1}{2} CV^2 \equiv \frac{1}{2} QV$$

5.13.5 Energia num Condensador plano de área A e separação d

Num condensador com armaduras planas de área A separadas por uma distância $d \ll \sqrt{A}$ é possível obter uma estimativa da energia armazenada por unidade de volume na região entre as armaduras. Uma vez que a energia total armazenada no condensador é $U_c = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} C V^2$ quando a diferença de potencial entre as armaduras é V , então a partir da definição de capacidade

$$C = \frac{\epsilon_o A}{d} \quad \Rightarrow \quad u_c = \frac{\text{Energia}}{\text{Volume}} = \frac{1}{2} \frac{C V^2}{A d} = \frac{1}{2} \epsilon_o \left(\frac{V}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_o E^2$$



6. Eletrostática na Matéria

Conteúdo

6.1	Campo Elétrico na Matéria: Não-Condutores ou Dielétricos	152
6.1.1	Polarização Elétrica \vec{P}	152
6.1.2	Densidades de Cargas de Polarização: $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$; $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$	154
6.1.3	Deslocamento Elétrico: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	156
6.1.4	Lei de Gauss na matéria	156
6.1.5	Condições Fronteira para o Campo Elétrico \vec{E} na superfície de separação de dois meios.	159
6.1.6	Condições Fronteira para o Deslocamento Elétrico \vec{D} na superfície de separação de dois meios.	159
6.2	Capacidade e Condensadores	160
6.2.1	Condensadores em Série e Paralelo	166
6.2.2	Força Aplicada ao Dielétrico num Condensador plano	167
6.3	Campo Elétrico na Matéria: Condutores e Corrente Elétrica Estacionária.	169
6.3.1	Intensidade de Corrente Elétrica I (A)	169
6.3.2	Vetor Densidade de Corrente Elétrica \vec{J} $\left(\frac{A}{m^2}\right)$	169
6.3.3	Lei de Ohm Microscópica $\vec{J} = \sigma_e \vec{E}$	169
6.3.4	Tipos de Corrente: deriva, difusão, iônica.	170
6.3.5	Semicondutores tipo p e n	171
6.3.6	Corrente Elétrica : Efeitos no corpo humano	172
6.3.7	Galvanômetros	173

6.3.8	Experiência de Tolman: Razão Carga/Massa do eletrão.	173
6.4	Lei de Ohm: $\vec{J} = \sigma_e \vec{E}$	173
6.4.1	Lei de Ohm Macroscópica: $\mathcal{V} = Ri$	174
6.4.2	Caracterização de Condutores	175
6.4.3	Efeito Termoelétrico	175
6.4.4	Resistências em Série e Paralelo	176
6.4.5	Força Eletromotriz: $\mathcal{E}_e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r}$	176

6.1 Campo Elétrico na Matéria: Não-Condutores ou Dielétricos

6.1.1 Polarização Elétrica \vec{P}

Em meios não-condutores a existência de um campo elétrico exterior \vec{E}_o produz um desequilíbrio na distribuição eletrónica dos átomos e moléculas, que passam a apresentar um pequeno momento dipolar $\Delta\vec{p}$ por volume ΔV . Estes dipolos orientam-se preferencialmente na direção do campo exterior \vec{E}_o , o que significa que o campo elétrico dipolar \vec{E}_{pol} que originam opõe-se a este campo exterior, diminuindo-o dentro do material, i.e $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_{pol}$. O momento dipolar por unidade de volume define um campo vetorial que se designa por **Campo de Polarização** $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V}$.

A função que determina a polarização $\vec{P} = \mathcal{P}(\vec{E})$ depende do dielétrico (e as propriedades deste dependem da intensidade do campo aplicado). Quando o campo é suficientemente fraco para que a resposta do dielétrico seja **linear**, existe uma matriz $\mathbb{P}(\vec{r})$, possivelmente dependente da posição, tal que $\vec{P} = \mathbb{P} \cdot \vec{E}$. Quando o dielétrico é além disso **homogéneo**, \mathbb{P} não depende de \vec{r} , e quando é adicionalmente **isotrópico** (LHI) todas as direções respondem de forma igual ao campo aplicado, e portanto $\mathbb{P} = \epsilon_o \chi_e \mathbb{1}$ é um múltiplo escalar da matriz identidade. Como o momento de um dipolo aponta da carga negativa para a positiva, podemos estimar que em geral $\vec{P} \parallel -\vec{E}_{pol}$.

6.1.1.1 Momento dipolar de um átomo com uma distribuição esférica de carga num campo homogéneo $\vec{E}_{ext} = E_o \vec{e}_x$

Consideremos o caso simples de um átomo com número atómico Z . A força sentida pelo núcleo atómico devida ao campo exterior é

$$\vec{F}_{ext} = (eZ) \vec{E}_{ext}$$

Por outro lado, assumindo que o centro de carga da distribuição eletrónica se desloca para uma distância x do núcleo atómico sem grande deformação, a força média sentida pelo núcleo é ¹

$$\vec{F}_{el} = eZ \vec{E}_{el}(x) = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_o x^2} \left(-eZ \frac{x^3}{R^3} \right) \vec{e}_x = -\frac{(eZ)^2 x}{4\pi\epsilon_o R^3} \vec{e}_x$$

¹ O campo no interior de uma distribuição homogénea de carga $Q = -eZ$ numa esfera de raio R à distância x do seu centro é calculável usando a Lei de Gauss para uma superfície esférica de raio x , concêntrica com a da distribuição de carga:

$$\oiint_{S_x} \vec{E}_{el} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_o} \left(Q \frac{x^3}{R^3} \right) \implies \vec{E}_{el}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o x^2} \left(-eZ \frac{x^3}{R^3} \right) \vec{e}_x$$

No equilíbrio

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{el} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_o = \frac{eZ x}{4\pi \epsilon_o R^3}$$

ou seja, no equilíbrio a separação entre o centro de cargas eletrónicas e o núcleo atómico é

$$x = \frac{4\pi \epsilon_o R^3}{eZ} E_o$$

O momento dipolar médio assim criado neste átomo é

$$\vec{p} = eZx \vec{e}_x = 4\pi \epsilon_o R^3 \vec{E}_{ext}$$

Estes dipolos orientam-se preferencialmente na direção do campo exterior \vec{E}_{ext} , o que significa que o campo elétrico dipolar \vec{E}_{pol} que originam opõe-se a este campo exterior, diminuindo-o dentro do material, i.e.

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{pol}$$

Se designarmos por **Polarização** \vec{P} o campo vetorial que descreve a densidade volúmica média de momentos dipolares atómicos

$$\vec{P} = \left\langle \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \right\rangle$$

e num volume ΔV existirem N átomos destes, então podemos escrever

$$\vec{P} = \epsilon_o \alpha \vec{E}_{ext}$$

onde

$$\alpha \approx \left\langle \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N 4\pi R_i^3 \right\rangle$$

Suscetibilidade elétrica χ_e

Consideremos um volume elementar cilíndrico de altura δh e base δS no dielétrico. Se neste volume existirem N dipolos de momento \vec{p} todos alinhados com a direção axial do cilindro, então a polarização seria o vetor

$$\vec{P} = \frac{N \vec{p}}{\delta \vec{S} \cdot \delta \vec{h}}$$

As cargas de polarização nas bases seriam $\pm \delta Q_p = \sigma_p dS$ de forma que, de longe, este cilindro seria visto como um dipolo de magnitude

$$N \vec{p} \equiv \delta Q_p \delta \vec{h}$$

Podemos assim escrever

$$\vec{P} \cdot d\vec{S} = \sigma_p dS$$

A densidade superficial de carga de polarização nas bases do cilindro é assim

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

onde \vec{n} representa a normal para exterior em cada base do cilindro.

O pequeno volume cilíndrico de dielétrico funciona também como **um pequeno condensador plano** com armaduras carregadas com densidade de carga σ_p e que criam um campo médio dipolar \vec{E}_{pol} . Se escolhermos as bases $\delta\vec{S}$ ortogonais a \vec{P} , então podemos escrever

$$\vec{P} = (\vec{P} \cdot \vec{n}) \vec{n} = \sigma_p \vec{n}$$

e

$$\vec{E}_{pol} = -\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \vec{n} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Em dielétricos **Lineares, Homogêneos e Isotrópicos** (LHI) a polarização é naturalmente proporcional ao campo exterior

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_{ext} \quad (\text{com } \alpha < 1)$$

porque os dipolos tendem a alinhar-se com o campo aplicado. Assim o campo elétrico \vec{E} dentro do dielétrico é a soma do campo exterior \vec{E}_{ext} e o campo médio dipolar \vec{E}_{pol} .

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{pol} = \vec{E}_{ext} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{(1-\alpha)}{\epsilon_0} \vec{P}$$

ou seja

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

onde a **Suscetibilidade Elétrica** do meio dielétrico é

$$\chi_e = \frac{\alpha}{1-\alpha} > 0.$$

6.1.2 Densidades de Cargas de Polarização: $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$; $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$

As cargas de polarização num dielétrico polarizado têm que somar zero no total porque estas cargas só existem localmente em pares \oplus/\ominus . Como qualquer volume de dielétrico deve ter um total nulo de cargas de polarização (quer para dielétricos polares ou não-polares) podemos concluir que, a haver uma distribuição volúmica de cargas de polarização ρ_p , então, designando por ∂V a superfície fronteira de um volume de dielétrico V ,

$$\oint_{\partial V} \sigma_p dS = - \iiint_V \rho_p dV$$

mas como vimos $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ pelo que $\sigma_p dS = \vec{P} \cdot d\vec{S}$ e

$$\oint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S} \equiv \iiint_V \nabla \cdot \vec{P} dV = - \iiint_V \rho_p dV$$

donde concluímos que a densidade volúmica de cargas de polarização deve ser

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Ao campo \vec{E}_{pol} está associado um potencial do tipo dipolar ϕ_p . A partir da densidade de momentos dipolares \vec{P} podemos determinar este potencial dipolar longe da distribuição de dipolos de polarização usando a expressão (5.12) e integrando sobre todo o volume V do dielétrico ²:

$$\phi_p(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \vec{P}(\vec{r}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) dV$$

Usando a identidade

$$\nabla \cdot (\psi \vec{P}) = \psi \nabla \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \nabla \psi$$

com $\psi = \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$ obtém-se, fazendo uso do teorema Fluxo-Divergência,

$$\phi_p(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\partial V} \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{-\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV$$

A última expressão indica que o potencial eletrostático devido à distribuição espacial de dipolos de polarização é aparentemente devida a **cargas superficiais de polarização** com densidade

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

e **cargas de polarização distribuídas em volume** com densidade

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

² Relembre que $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

6.1.3 Deslocamento Elétrico: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

O campo de deslocamento elétrico \vec{D} define-se em geral como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

No vácuo $\vec{P} = 0$ pelo que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Para meios lineares e campos pequenos comparados com o campo de rotura, ou para materiais **lineares, homogêneos e Isotrópicos** (LHI) podemos usar a definição

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

onde χ_e representa a **Permitividade Elétrica** do material. Nesse caso podemos sempre definir um campo \vec{D} de **Deslocamento Elétrico**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \quad (6.1)$$

onde

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

é a **Permeabilidade Elétrica** e

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

a **Permeabilidade Relativa** ou **Constante Dielétrica** do material. Desta equação (6.1) conclui-se que, conhecido \vec{E} e ϵ , é possível determinar a polarização como

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

e a **Suscetibilidade Elétrica**

$$\chi_e = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0}$$

6.1.4 Lei de Gauss na matéria

Definição 6.1.1 — Lei de Gauss Geral.

Material	Constante Dielétrica ϵ_r	Campo Rotura ($10^6 V/m$)
Vácuo	1.0	—
Teflon	2.1	60
Óleo Silicone	2.5	15
Poliestireno	2.56	24
Mylar	3.2	7
Cloreto Polivinil	3.4	40
Nylon	3.4	14
Papel em Parafina	3.5	11
Papel	3.7	16
Quartzo Fundido	3.78	8
Baquelite	4.9	24
Vidro Pyrex	5.6	14
Porcelana	6.0	12
Borracha Neopreno	6.7	12
Ar seco	59.0	3
Água	80.0	10-35
Titanato Estrôncio	233.0	8

Tabela 6.1: Constantes dielétricas ϵ_r e campos de rotura em MV/m para vários materiais.

O fluxo do campo de deslocamento elétrico \vec{D} através de uma superfície de Gauss fechada S é igual à **carga verdadeira** Q_c (i.e. excluindo as cargas de polarização) dentro da superfície S .

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_c$$

Designando por ρ_c a densidade de carga verdadeira em cada ponto, a Lei de Gauss Geral é traduzida na equação local

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$$

Para uma superfície de Gauss S , delimitando um volume V e passando completamente dentro de um dielétrico, contendo **cargas verdadeiras** Q_c e densidades de **cargas de polarização** em superfície σ_p e em volume ρ_p , obtemos da lei de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_c + Q_p)_{int} \quad (6.2)$$

onde Q_{int} designa a soma as cargas verdadeiras Q_c e das cargas de polarização Q_p localizadas **dentro da superfície de Gauss**. Podemos ver que, no volume delimitado por S , se tem

$$Q_p = \iint_{S_i} \sigma_p dS_i + \iiint_V \rho_p dV$$

onde S_i representa qualquer superfície do dielétrico dentro da superfície de Gauss S . As cargas de polarização num pedaço qualquer de dielétrico têm que somar zero porque estas cargas ligadas só existem em pares \oplus/\ominus ligeiramente separadas por distâncias microscópicas. Assim, qualquer que seja o volume de dielétrico a considerar dentro da superfície de Gauss S , deve-se ter

$$\iint_{S_i} \sigma_p dS_i + \iiint_V \rho_p dV = - \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

O termo à direita representa as cargas de polarização superficiais que existiriam sobre a própria superfície de Gauss S se se cortasse o dielétrico com esta. (Se a superfície de Gauss não interceder o dielétrico ambos os lados da equação anterior são nulos.) Substituindo a expressão anterior na Lei de Gauss original (6.2)

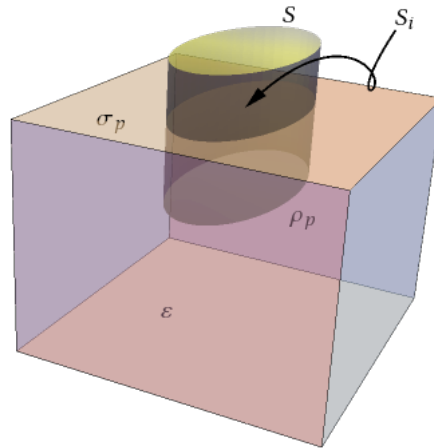


Figura 6.1: Superfície de Gauss S (amarelo) intercetando a fronteira dum material dielétrico de permissividade ε (laranja) com o vazio. O dielétrico está carregado com densidades de carga de polarização σ_p e ρ_p , para além de poder ter cargas verdadeiras também.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(Q_c - \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \oiint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q_c$$

Desta forma obtemos a **Lei de Gauss Generalizada** a dielétricos

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_c \quad (6.3)$$

onde designámos por \vec{D} o vetor de **Deslocamento Elétrico**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

De acordo com a lei de Gauss generalizada tem-se assim que a **carga verdadeira** Q_c interna a S é

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \equiv \iiint_V \nabla \cdot \vec{D} dV = Q_c$$

pelo que podemos assemelhar $\nabla \cdot \vec{D}$ a uma densidade volúmica de carga verdadeira ρ_c .

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c \quad (6.4)$$

A lei de Gauss escreve-se agora, tendo em conta o aparecimento de cargas de polarização $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c + \rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_c - \nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$$

i.e., o deslocamento elétrico \vec{D} está apenas dependente das cargas livres de condução ρ_c e não depende explicitamente das cargas de polarização.

6.1.5 Condições Fronteira para o Campo Elétrico \vec{E} na superfície de separação de dois meios.

A equação de Poisson $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ determina que na passagem de uma superfície com densidade de carga σ , a componente normal $E_n = \vec{E} \cdot \vec{n}$ do campo \vec{E} sofre uma descontinuidade (se os meios de cada lado da superfície apresentarem permitividade ϵ_0):

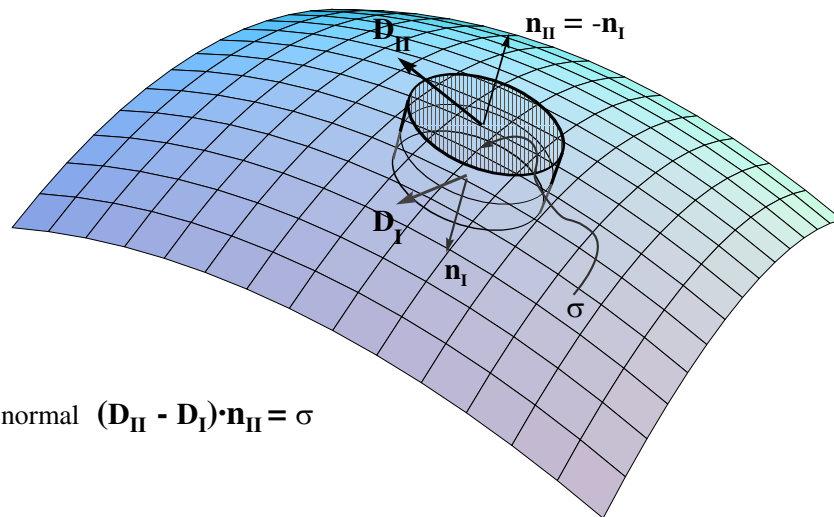
$$E_{II_n} - E_{I_n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

6.1.6 Condições Fronteira para o Deslocamento Elétrico \vec{D} na superfície de separação de dois meios.

A Lei de Gauss implica que na passagem de uma superfície carregada com densidade de carga σ , a componente normal $\vec{E} \cdot \vec{n} = E_n$ do campo elétrico sofre uma descontinuidade proporcional à densidade superficial de carga σ na superfície (incluindo cargas de polarização superficiais). De forma mais geral, a equação $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$, com $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, determina uma descontinuidade apenas dependente das cargas verdadeiras na superfície.

$$(\vec{D}_{II} - \vec{D}_I) \cdot \vec{n}_{II} = \sigma_c$$

No caso geral, se a superfície separar duas regiões de permitividades ϵ_I e ϵ_{II} , o uso da Lei de Gauss com o vector $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ numa caixa elementar S com bases de área S_B paralelas à superfície de separação, de cada lado desta, permite ver que no limite em que a altura de S tende para zero,



componente normal $(\vec{D}_{II} - \vec{D}_I) \cdot \vec{n}_{II} = \sigma$

Figura 6.2: Descontinuidade da componente normal de \vec{D} ao atravessar uma superfície carregada.

$$\Phi_S(\vec{D}) = (\vec{D}_I \cdot \vec{n}_I + \vec{D}_{II} \cdot \vec{n}_{II}) S_B = (\vec{D}_{II} - \vec{D}_I) \cdot \vec{n}_{II} S_B = \sigma_c S_B$$

já que as normais às bases da caixa S verificam $\vec{n}_I = -\vec{n}_{II}$, ou seja

$$\left(\vec{D}_{II} - \vec{D}_I\right) \cdot \vec{n}_{II} = \sigma_c \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{II} E_{II}^\perp - \varepsilon_I E_I^\perp = \sigma_c$$

Se usarmos a Lei de Gauss com o campo \vec{E} obtemos em vez disso

$$\Phi(\vec{E}) = \left(\vec{E}_I \cdot \vec{n}_I + \vec{E}_{II} \cdot \vec{n}_{II}\right) S_B = \left(\vec{E}_{II} - \vec{E}_I\right) \cdot \vec{n}_{II} S_B = \frac{\sigma_c + \sigma_p}{\varepsilon_o} S_B$$

ou seja

$$\varepsilon_o (E_{II}^\perp - E_I^\perp) = \sigma_c + \sigma_p$$

Assim, mesmo que não existem cargas verdadeiras na superfície de separação dos dois dielétricos ($\sigma_c = 0$), a componente normal de \vec{E} sofre uma descontinuidade quando há cargas de polarização $\sigma_p \neq 0$, mas a componente normal de \vec{D} é contínua através da transição.

Por outro lado, as componentes do campo \vec{E} paralelas à interface entre os dois meios devem ser iguais dos dois lados, como consequência do Teorema de Stokes para um campo potencial

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_I^\parallel = E_{II}^\parallel \quad \Leftrightarrow \quad D_I^\parallel = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}} D_{II}^\parallel$$

onde a componente paralela é

$$\vec{n} \times (\vec{E} \times \vec{n}) = E^\parallel$$

Na passagem de um meio dielétrico para outro, na ausência de cargas de verdadeiras ($\sigma_c = 0$), deve verificar-se a condição de refração das linhas de campo elétrico

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{II} E_{II}^\perp = \varepsilon_I E_I^\perp \\ \varepsilon_{II} \frac{E_{II}^\parallel}{E_{II}^\parallel} = \varepsilon_I \frac{E_I^\perp}{E_I^\parallel} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{II}^\parallel = E_I^\parallel \\ \tan(\theta_{II}) = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}} \tan(\theta_I) \end{array} \right. \Rightarrow$$

6.1.6.1 Determinação das Cargas Superficiais de Polarização num dielétrico homogêneo.

À superfície de um dielétrico polarizado existem cargas superficiais de polarização com densidade σ_p . Usando uma superfície de Gauss com bases de cada lado da superfície e muito perto desta, é possível desprezar as contribuições em volume de cargas de polarização para o fluxo, e considerar apenas as cargas superficiais. Assim

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint \varepsilon_o \vec{E} \cdot d\vec{S} = A(\sigma_c - \sigma_p) \\ \varepsilon_r A(\sigma_c - \sigma_p) = A\sigma_c \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = A\sigma_c \\ \Rightarrow \sigma_p = \sigma_c \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \end{array} \right.$$

6.2 Capacidade e Condensadores

Tubos de fluxo

Aplicando a Lei de Gauss a uma superfície de Gauss formada exclusivamente por linhas de campo que partem da superfície de um condutor positivamente carregado e terminam num outro negativamente carregado podemos concluir que o fluxo deve ser nulo (se fecharmos a superfície

de Gauss com bases inteiramente dentro dos respetivos condutores, onde em equilíbrio o campo elétrico se anula).

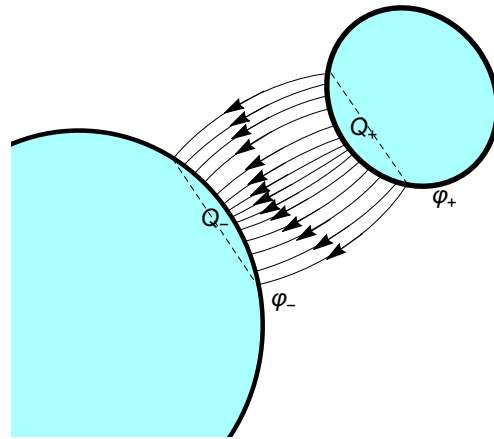


Figura 6.3:

De facto o campo deve ser sempre tangente às linhas de campo, e conseqüentemente tangente à superfície de Gauss formada por elas, pelo que $\vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv 0$ em qualquer ponto da superfície assim formada. Mas então a carga interior Q_{int} a uma tal superfície de Gauss deve ser nula, o que só pode acontecer se $Q_+ + Q_- = 0$, onde Q_{\pm} representam as cargas superficiais delimitadas pela superfície de Gauss nos condutores onde as linhas de campo se originam e terminam.

Um tal tubo de linhas de campo conjuntamente com as secções dos condutores em que se baseiam (armaduras) formam um condensador elementar.

Uma vez que a superfície de cada condutor em equilíbrio é uma equipotencial, todas as cargas Q_+ estão ao no mesmo potencial ϕ_+ , e todas as cargas $Q_- = -Q_+$ estão também no mesmo potencial ϕ_- . Podemos assim definir unicamente o conceito de Capacidade dum condensador.

Definição 6.2.1 — Capacidade.

A **Capacidade** C de um condensador é a razão entre a carga Q na armadura positiva e a queda de potencial (q.d.p.) ou tensão $V = \phi_+ - \phi_-$ entre as armaduras.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (F = Farad)^a$$

^a No sistema de unidades SI o Farad $\equiv \frac{\text{Ampere} \times \text{Segundo}}{\text{Volt}}$.

Maior capacidade significa poder armazenar mais carga $\pm Q$ nas armaduras para a mesma tensão aplicada V entre armaduras. Como se verá adiante isto significa maior capacidade de armazenar energia na proporção $U_c = \frac{1}{2} CV^2$ para uma mesma tensão V , que só pode crescer até um valor máximo dependendo da geometria e do campo de rotura do material entre as armaduras.

— CAPACIDADE DE UM CONDENSADOR PLANO —

O campo à superfície de um plano uniforme de carga é semelhante ao do centro de um disco carregado com densidade superficial σ , que vimos já ser orientado na direção \vec{n} normal à superfície:

$$\vec{E}_s = \frac{\sigma}{2\epsilon} \vec{n}$$

Num condensador plano, desprezando os efeitos fronteira, desde que a separação d entre as armaduras seja pequena comparada com as dimensões lineares desta, ou seja $d \ll \sqrt{A}$, podemos considerar que o campo no seu interior é constante e igual à sobreposição dos campos das duas armaduras, com cargas Q e $-Q$ que se distribuem sobre a área A em cada armadura.

$$\sigma_+ = -\sigma_- = \frac{Q}{A}$$

Dentro do condensador a permitividade elétrica é $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_o$, e as normais às armaduras são opostas, $\vec{n}_+ = -\vec{n}_-$, pelo que os campos se adicionam devido à polaridade diferente das cargas

$$\vec{E}(\vec{r}_{int}) = \vec{E}_+(\vec{r}_{int}) + \vec{E}_-(\vec{r}_{int}) = \frac{\sigma_+}{2\epsilon} \vec{n}_+ + \frac{\sigma_-}{2\epsilon} \vec{n}_- = \frac{Q}{\epsilon A} \vec{n}_+$$

Como deve ser o campo fora do condensador e na sua vizinhança?

Conhecido o campo $\vec{E}(\vec{r}_{int})$ podemos determinar o potencial $\phi(\vec{r}_{int})$ que lhe está associado através de $\vec{E}(\vec{r}_{int}) = -\nabla\phi(\vec{r}_{int})$. Neste caso, fazendo $\vec{n}_+ = -\vec{e}_z$, obtemos imediatamente

$$\phi(z) = \frac{Q}{\epsilon A} z + \phi_o$$

A queda de potencial entre as armaduras separadas por uma distância d é assim

$$V = \phi(d) - \phi_o = \frac{Q}{\epsilon A} d$$

A capacidade do condensador é pela definição

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon A}{d}$$

—CAPACIDADE DE UMA ESFERA CONDUTORA ISOLADA—

Como as linhas de campo dum condutor isolado se estendem indefinidamente, podemos considerar que a outra armadura do condensador está infinitamente distante e ao potencial $\phi_\infty = 0$. Assim a superfície do condutor funciona como a armadura dum condensador com uma diferença de potencial igual ao potencial constante do condutor.

No caso dum esfera de raio R , e na ausência de outras cargas e campos, a distribuição das cargas à superfície é uniforme com densidade constante $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$.

Vimos já que neste caso o campo gerado pela esfera é equivalente, fora dela, ao de uma carga pontual Q no seu centro. Assim o potencial à superfície deve ser igual a

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{R} \quad (V)$$

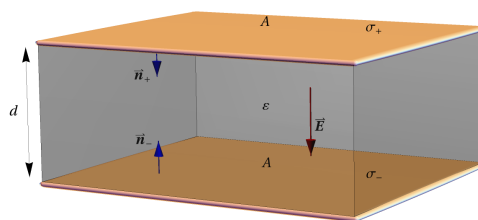


Figura 6.4: Condensador plano com dielétrico de permitividade ϵ , armaduras de área A e separação d , capacidade $C = \frac{\epsilon A}{d}$.

A capacidade C de um condensador é definida como a razão entre a carga Q armazenada numa armadura e a queda de potencial $V = \phi_+ - \phi_-$ suportada pelas armaduras. Neste caso

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_o R(F)$$

Para a Terra $R = 6.4 \cdot 10^6 m$ obtém-se

$$C = 4\pi\epsilon_o R = \frac{6.4 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} \approx 0.7 mF$$

Para uma esfera de raio $R = 10^{-2} m$ a capacidade é

$$C = \frac{10^{-11}}{9} \approx 1 pF$$

CONDENSADOR DE ARMADURAS ESFÉRICAS

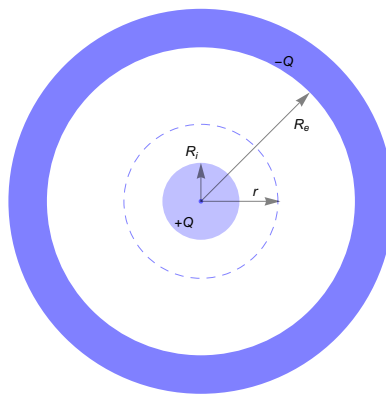


Figura 3

Considerando que o espaço entre as armaduras está vazio, ou seja a permitividade elétrica é ϵ_o , podemos usar a lei de Gauss e a simetria do campo para deduzir que

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o} \quad \Leftrightarrow \quad E_r(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

Por outro lado

$$V = \phi_i - \phi_e = - \int_{R_e}^{R_i} E_r(r) dr = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_o} \int_{R_e}^{R_i} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right) \equiv \frac{Q_{int}}{C}$$

$$C = 4\pi\epsilon_o \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)^{-1} = \frac{4\pi\epsilon_o R_i R_e}{R_e - R_i}$$

CONDENSADOR DE CILINDROS CONDUTORES COAXIAIS

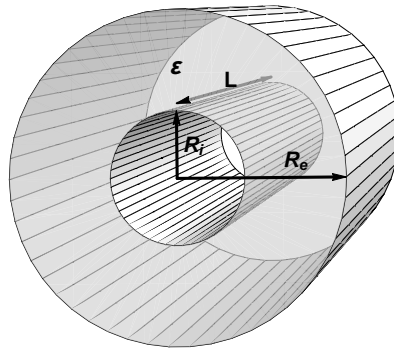


Figura 4

Superfície de Gauss=Cilindro coaxial de raio r e altura h .

$$\oiint_{S_h} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \varepsilon E_r(r) 2\pi r h = Q_{int} \quad \Leftrightarrow \quad E_r(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon r h}$$

$$V = \phi_i - \phi_e = - \int_{R_e}^{R_i} E_r(r) dr = \int_{R_i}^{R_e} \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon r h} dr = \frac{Q_{int} \log\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi\varepsilon h} \equiv \frac{Q_{int}}{C}$$

$$\frac{C}{h} = \frac{2\pi\varepsilon}{\log\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}$$

RESUMO

Condensador plano de área A e separação d	$C = \frac{\epsilon A}{d}$
Esfera condutora isolada de raio R	$C = 4\pi\epsilon R$
Condensador esférico de raios R_i e R_e	$C = 4\pi\epsilon \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)$
Cilindros condutores coaxiais de raios R_i e R_e	$\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon}{\log\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}$
Cilindro condutor de raio R paralelo a plano condutor à distância h	$\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left(\frac{h}{R}\right)}$ ^a

Tabela 6.2: Capacidade de condensadores simples cheios de um dielétrico de permissividade ϵ .

^a Duas linhas infinitas de densidade linear de carga $\pm\lambda$, separadas por uma distância $2s$, geram um potencial num ponto $\vec{r} = \{x, y\}$

$$V(\vec{r}) = V_+(r_1) + V_-(r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

onde $r_1 = \sqrt{(x+s)^2 + y^2}$ e $r_2 = \sqrt{(x-s)^2 + y^2}$. A equipotencial passando por (x, y) é uma circunferência de raio $R = \frac{2Ks}{K^2 - 1}$, centrada em $\vec{h} = \pm s \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \vec{e}_x$, onde $K = \frac{r_1}{r_2} = e^{2\pi\epsilon V/\lambda}$ e $\pm = \text{sgn}(x)$.

Reciprocamente, dados dois condutores cilíndricos paralelos, de raio R e separação $2h$, uniformemente carregados com densidades lineares de carga $\pm\lambda$, podemos concluir que geram um potencial equivalente ao de duas linhas de carga com as mesmas densidades $\pm\lambda$, mas separação $2s = 2\sqrt{h^2 - R^2}$, tal que $K = \frac{r_1^*}{r_2^*} = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - R^2}}{R}$ para pontos à superfície dos condutores, pelo que os seus potenciais são

$$V(\pm h \vec{e}_x + R \vec{e}_r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \log\left(\frac{h \pm \sqrt{h^2 - R^2}}{R}\right) = \pm \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cosh^{-1}\left(\frac{h}{R}\right)$$

[2, § 3-31, pag. 107]

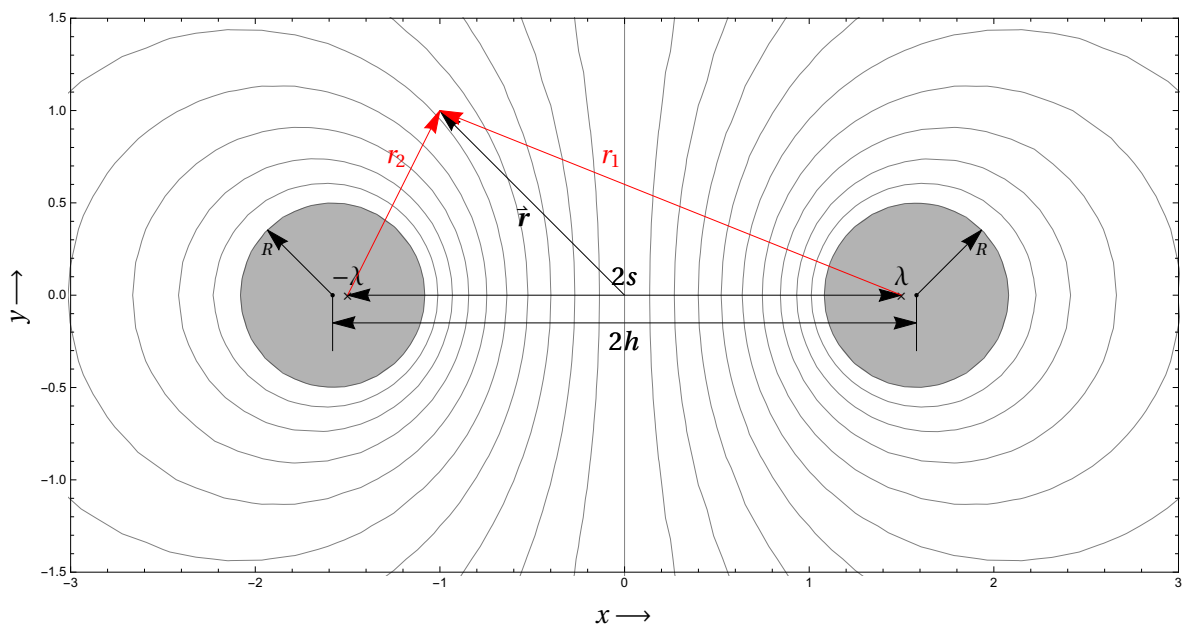


Figura 6.5:

6.2.1 Condensadores em Série e Paralelo

Um sistema de condensadores pode ser ligado de forma a ter duas configurações básicas, em série e em paralelo:

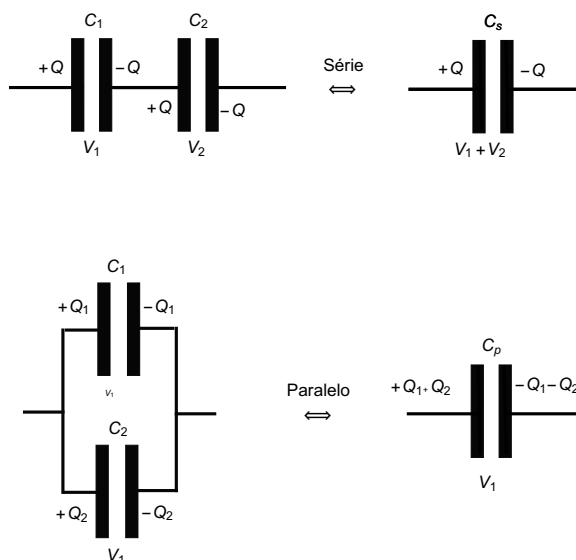


Figura 1

Quando em série as seguintes equações são válidas

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{C_1} Q \\ V_2 = \frac{1}{C_2} Q \end{cases} \Rightarrow V \equiv V_1 + V_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q \equiv \frac{1}{C_s} Q$$

Em paralelo tem-se por outro lado

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V_1 \\ Q_2 = C_2 V_1 \end{cases} \Rightarrow Q \equiv Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) V_1 \equiv C_p V \Rightarrow C_p = C_1 + C_2$$

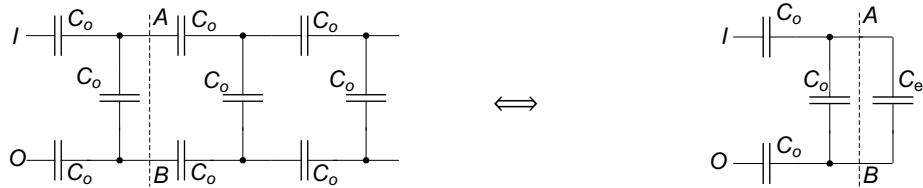
Assim em geral podemos escrever as capacidades equivalentes C_s e C_p a partir de

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} ; \quad C_p = \sum_{i=1}^N C_i$$

$$C_s = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right)^{-1} ; \quad C_p = \sum_{i=1}^N C_i$$

PROBLEMA: CADEIA INFINITA DE CONDENSADORES

Determine a capacidade equivalente C_{eq} de uma linha infinita de condensadores idênticos de capacidade C_o em série e paralelo como indicado na figura.



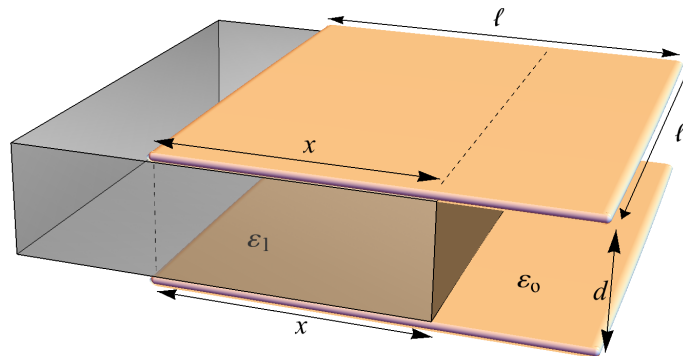
Assumindo que C_{eq} é a capacidade equivalente, retirar um conjunto de condensadores da extremidade da linha (à esquerda da secção AB) não deve alterar muito o seu valor.

Assim entre I e O ficamos com 3 condensadores em série, sendo o segundo um paralelo de dois condensadores C_o e C_{eq} . (Toda a linha à direita da secção AB é substituída por um condensador equivalente de capacidade C_{eq} em paralelo com o condensador do meio C_o .)

Assim

$$\frac{1}{C_o} + \frac{1}{C_o + C_{eq}} + \frac{1}{C_o} = \frac{1}{C_{eq}} \Rightarrow C_{eq} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)C_o$$

6.2.2 Força Aplicada ao Dielétrico num Condensador plano



6.2.2.1 Condensador ligado a bateria (Potencial V constante)

- Energia despendida pelo Condensador: $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow dU = \frac{1}{2} V^2 dC$
- Energia despendida pela Bateria a manter V constante: $dW_{bat} = V dQ = V^2 dC$
- Trabalho realizado sobre o Dielétrico:

$$dW = dW_{bat} - dU = \frac{1}{2} V^2 dC$$

$$dW = \nabla W \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \therefore \quad \vec{F} = \nabla W = \frac{1}{2} V^2 \nabla C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{V}{d} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\epsilon_1 V}{d} \\ E_o = \frac{\sigma}{\epsilon_o} = \frac{V}{d} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\epsilon_o V}{d} \end{array} \right. \quad \therefore C(x) = \frac{\epsilon_1 \ell x}{d} + \frac{\epsilon_o \ell (\ell - x)}{d} = \frac{\epsilon_o \ell}{d} ((\epsilon_r - 1)x + \ell)$$

$$\nabla W = \vec{F} = \frac{1}{2} V^2 \nabla C = \frac{\epsilon_o \ell V^2}{2d} (\epsilon_r - 1) \vec{e}_x$$

6.2.2.2 Condensador de armaduras isoladas (Carga Q constante)

No caso de termos que usar um condensador isolado, podemos pôr que

- Energia dependida pelo Condensador: $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow -dU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} dC$
- Trabalho realizado sobre o Dielétrico: $dW = -dU$

$$dW = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} dC = \nabla W \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \therefore \nabla W = \vec{F} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \nabla C = \frac{d(\epsilon_r - 1)Q^2}{2\epsilon_o L(L + x(\epsilon_r - 1))^2} \vec{e}_x$$

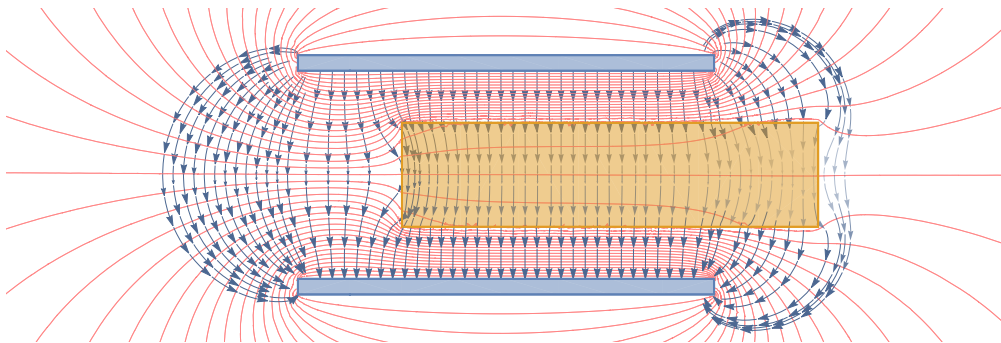


Figura 6.6: Condensador plano parcialmente preenchido com placa dielétrica com folga.

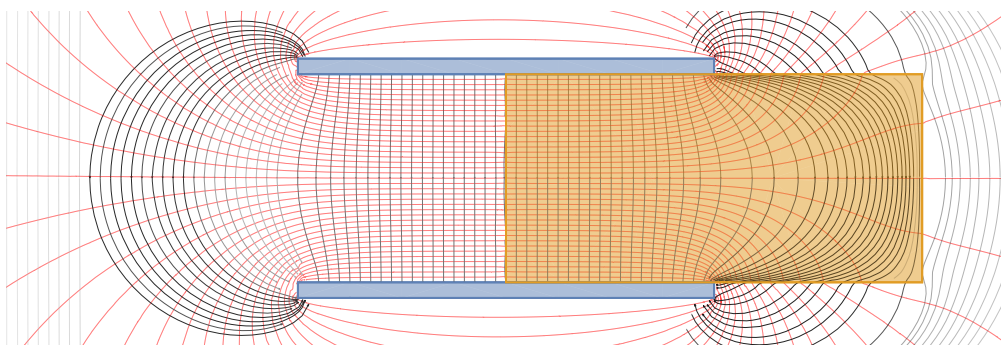


Figura 6.7: Condensador plano parcialmente preenchido com placa dielétrica sem folga.

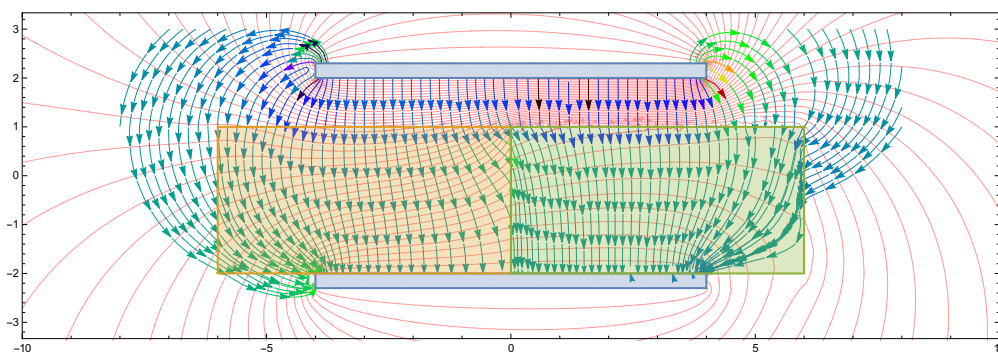


Figura 6.8: Condensador plano parcialmente preenchido com duas placas dielétricas.

6.3 Campo Elétrico na Matéria: Condutores e Corrente Elétrica Estacionária.

6.3.1 Intensidade de Corrente Elétrica I (A)

A intensidade de corrente elétrica I num condutor é definida como a quantidade de carga que atravessa por unidade de tempo uma secção arbitrária do mesmo. O Ampère (A) é por definição a corrente que atravessa cada um de dois fios condutores paralelos, separados de um metro, e que causa entre eles uma força de $2 \times 10^{-7} N$ por unidade de comprimento. A unidade de carga Coulomb (C) é definida como a carga transportada numa corrente de 1 (A) durante um segundo.

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \left(A \equiv \frac{C}{s} \right)$$

6.3.2 Vetor Densidade de Corrente Elétrica \vec{J} $\left(\frac{A}{m^2} \right)$

A cada corrente I podemos associar um campo de vetores designado **densidade de corrente** \vec{J} cujo fluxo através duma secção S do condutor é a intensidade de corrente referida,

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (A)$$

Em geral, para secções de condutores pequenas ou distribuições homogêneas de corrente podemos aproximar $\vec{J} \approx \frac{I}{S} \vec{n}$ e $d\vec{\ell} = d\ell \vec{n}$ donde $\vec{J} \cdot d\vec{\ell} = \frac{I}{S} d\ell$.

6.3.3 Lei de Ohm Microscópica $\vec{J} = \sigma_e \vec{E}$

Em **condutores sólidos e líquidos** com n cargas de condução q_e por unidade de volume, cada uma de massa m_e , se não houver um campo elétrico aplicado em geral a velocidade média das cargas é $\langle v \rangle = 0$, embora elas sofram um grande número de colisões e acelerações aleatórias. Contudo, quando se aplica um campo elétrico, as cargas q_e vão ser preferencialmente aceleradas pela força $q_e \vec{E}$ durante o curto intervalo de tempo $\langle \delta t \rangle$ entre colisões com os átomos do meio, e a velocidade média das cargas passa a ser $\langle \delta v \rangle \neq 0$. Uma vez que durante o tempo δt dum percurso livre entre colisões o desvio em velocidade de cada carga é

$$\delta \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \delta t = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \delta t \quad \Rightarrow \quad \langle \delta \vec{v} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{v}}{dt} \delta t \right\rangle = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \langle \delta t \rangle$$

podemos definir a densidade de corrente elétrica \vec{J} como o vetor que representa a quantidade de carga que atravessa por unidade de tempo uma superfície de área unitária perpendicular a $\langle \delta \vec{v} \rangle$

$$\vec{J} = nq_e \langle \delta \vec{v} \rangle \equiv \frac{nq_e^2 \langle \delta t \rangle}{m_e} \vec{E} = \sigma_e \vec{E} \quad \left(\frac{A}{m^2} \right)$$

A constante característica do material e do seu estado

$$\sigma_e = \frac{nq_e^2 \langle \delta t \rangle}{m_e} \quad (Sm^{-1})$$

designa-se a **condutividade elétrica**. As unidades $S/m = Siemens/metro$ são evidentemente escolhidas a partir das unidades para \vec{J} ($\frac{A}{m^2}$) e \vec{E} ($\frac{V}{m}$). O *Siemens* é idêntico a $Ohm^{-1} \equiv Mho$.

A Lei de Ohm não é universalmente válida:

- Em sólidos e líquidos é válida porque o percurso livre médio é muito pequeno, as cargas têm uma velocidade média muito baixa e por isso $\langle \delta \vec{v} \rangle // \vec{E}$, ou seja as linhas de corrente (tangentes a $\langle \delta \vec{v} \rangle$) coincidem aproximadamente as linhas de campo (tangentes a \vec{E}), o que explica a Lei de Ohm.
- No vácuo não existe Lei de Ohm: embora se possa definir uma densidade de corrente \vec{J} o conceito de condutividade σ_e não é bem definido.
- Em gases, o caminho livre médio de iões (positivos e negativos, produzidos por colisões) é muito grande, e também aí a lei de Ohm deixa de ser válida porque a velocidade média das cargas deixa de estar alinhada com o campo \vec{E} .

6.3.4 Tipos de Corrente: deriva, difusão, iónica.

Exercício 6.1 CORRENTE ELÉTRICA E VELOCIDADE DE DERIVA NO COBRE

Um fio de cobre (*Cu*) com uma secção transversal de 3 mm^2 é percorrido por uma corrente de 10 A. Sabendo que a massa específica do cobre é 8.95 g cm^{-3} e a sua massa atómica molar é 63.5 g mol^{-1} , determine a velocidade de deriva dos eletrões de condução.

Resposta 6.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Secção do Condutor : } S = 3 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ \text{Número de Avogadro : } N_A = 6.02214 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ \text{Massa Atómica : } A_{Cu} = 63.5 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ \text{Volume Molar : } V_{mol} = \frac{A_{Cu}}{\rho_{Cu}} = 7.09 \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Corrente Elétrica : } I = 10 \text{ A} \\ \text{Carga Elementar : } q = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \\ \text{Massa Específica : } \rho_{Cu} = 8.95 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ \text{Densidade Electrónica : } n = \frac{N_A}{V_{mol}} = 8.48 \times 10^{28} \frac{\text{el.}}{\text{m}^3} \end{array} \right.$$

6.3.4.1 Velocidade de deriva:

$$dQ = I dt = nq \vec{v}_d \cdot \vec{S} dt \implies v_d = \frac{I}{nqS} = 2.46 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.3.4.2 Mobilidade

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = q_e E \implies \langle \delta v \rangle = \frac{q_e}{m_e} \langle \delta t \rangle E \implies v_d = \mu E$$

Mobilidades $\mu = \frac{q_e}{m_e} \langle \delta t \rangle$ (20°C) :

Si puro : $\mu = 1.35 \times 10^{-1} \frac{m^2}{Vs}$;

GaAs: $\mu = 8.5 \times 10^{-1} \frac{m^2}{Vs}$

6.3.5 Semicondutores tipo *p* e *n*

- Nos materiais semicondutores alguns eletrões podem deslocar-se se forem excitados até atingir o nível da "banda de condução" e nessa altura conseguem deslocar-se com facilidade até dissiparem a sua energia em calor.
- Nos ***p*-semicondutores**, embora haja muito pouca mobilidade dos eletrões é frequente que nos locais em que estes faltam, ou "buracos", geralmente associados a impurezas com falta de eletrões de valência, pareça existir uma "carga" positiva que se desloca à medida que eletrões de átomos vizinhos vão ocupando o lugar vago quando sujeitos a um campo exterior que lhes forneça suficiente energia para saltar.
- Nos ***n*-semicondutores** as impurezas introduzem um excesso de eletrões.

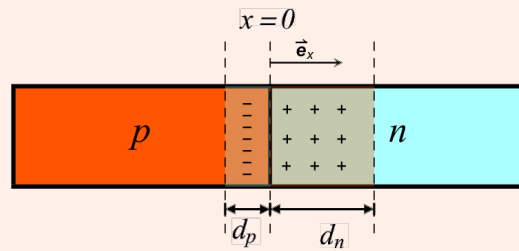
6.3.5.1 Díodo semicondutor

Um díodo semicondutor *pn* é constituído por um segmento de semicondutor-*n*, de silício (Si) dopado com iões de fósforo (P^+) que fornecem um eletrão de condução cada, ligado a um segmento semicondutor-*p*, silício dopado com iões de boro (B^-) que rouba um eletrão a um átomo de silício vizinho e forma assim um buraco (Si^+). Na região de contacto vai haver difusão de eletrões do semicondutor-*n* para o semicondutor-*p* de forma a neutralizar alguns iões Si^+ , deixando para trás iões de fósforo positivo P^+ no lado *n*, e de forma análoga alguns buracos na estrutura eletrónica de iões Si^+ podem transferir-se para a região do semicondutor-*n*, reforçando aí a carga positiva com iões Si^+ e expondo os iões negativos B^- no lado *p*. Este processo termina quando o campo gerado pela acumulação de cargas negativas e positivas de cada lado da junção entre os semicondutores (designada 'zona de depleção') é suficientemente forte para parar o processo de difusão. Em geral a densidade ρ_- de cargas negativas na zona de depleção do semicondutor-*p* é muito maior que a de cargas positivas ρ_+ na zona de depleção do semicondutor-*n*. Em consequência, as espessuras da zona de depleção em cada semicondutor verificam $d_n \gg d_p$.

Se aplicarmos uma tensão $V = \phi_n - \phi_p > 0$ às extremidades deste conjunto, o campo elétrico resultante no sentido $n \rightarrow p$ na zona de depleção é reforçado, o que inibe o movimento de cargas através da junção, e não existe assim uma corrente através dos semicondutores. Se a tensão for $V = \phi_p - \phi_n > 0$ então o campo elétrico na zona de depleção diminui, permitindo a difusão de mais eletrões e buracos através da superfície $x = 0$, que irão ser neutralizados por cargas opostas no outro lado, ao mesmo tempo que são renovados pela fonte de tensão que fornece eletrões do lado *n* e retira-os do lado *p*. Aparece assim uma corrente elétrica no sentido $p \rightarrow n$. (Ver corrente de deriva vs. corrente de difusão)

Exercício 6.2 CAMPO ELETROSTÁTICO NUM SEMICONDUTOR

Considere o díodo semicondutor *pn* na figura seguinte:

Figura 6.9: Díodo semicondutor pn

- Assumindo que podemos considerar a zona de cargas negativas no p -semicondutor como um plano uniformemente carregado, determine a sua densidade de carga superficial σ_- e o campo elétrico que produz. (A permitividade relativa do silício é $\epsilon_r = 11$.)
- Considerando que as cargas positivas estão uniformemente distribuídas em volume na zona de depleção do semicondutor- n até à espessura x_p , determine o campo elétrico gerado dentro e fora dessa região pelas cargas positivas.
- Determine o campo total gerado pelas duas distribuições de cargas em função de x .

Resposta 6.2

- a) A carga total para a zona de carga negativa é $\delta Q_- = S d_p \rho_-$ onde S é a secção do semicondutor, pelo que $\sigma_- = \frac{\delta Q_-}{S} = d_p \rho_-$ e o campo de um plano de cargas é $E = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon}$ onde $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$.

$$\vec{E}_-(x) = \frac{d_p \rho_-}{2\epsilon} \operatorname{sgn}(x) \vec{e}_x$$

- b) Na região $x \in [0, d_n]$ o campo das cargas positivas pode igualmente ser visto com uma sobreposição de campos de planos de espessura dx e densidade superficial $\sigma_+ = \rho_+ dx$, gerando campos $dE = \pm \frac{\rho_+ dx}{2\epsilon}$ pelo que

$$E(x) = \int dE = \int_0^x \frac{\rho_+}{2\epsilon} dx - \int_x^{d_n} \frac{\rho_+}{2\epsilon} dx = \frac{\rho_+}{\epsilon} \left(x - \frac{d_n}{2} \right)$$

Na região $x \notin [0, d_n]$ as contribuições são sempre no mesmo sentido pelo que

$$E(x) = \int dE = \pm \int_0^{d_n} \frac{\rho_+}{2\epsilon} dx = \pm \frac{d_n \rho_+}{2\epsilon}$$

Assim

$$\vec{E}_+(x) = \begin{cases} \frac{\rho_+}{\epsilon} \left(x - \frac{d_n}{2} \right) \vec{e}_x & (x \in [0, d_n]) \\ \frac{d_n \rho_+}{2\epsilon} \operatorname{sgn}(x - d_n) \vec{e}_x & (x \notin [0, d_n]) \end{cases}$$

- c) Somando os campos das duas regiões obtém-se o campo total tendo em conta que $d_p \rho_- = -d_n \rho_+$.

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \frac{\rho_+}{\epsilon} (x - d_n) & (x \in [0, d_n]) \\ 0 & (x \notin [0, d_n]) \end{cases}$$

6.3.6 Corrente Elétrica : Efeitos no corpo humano

- $I < 0.01A \implies$ Cócegas ou Impercetível
- $I \approx 0.02A \implies$ Doloroso e Agarra

- $I \approx 0.03A \Rightarrow$ Perturbação na Respiração
- $I \approx 0.07A \Rightarrow$ Muita Dificuldade de Respirar. Só outra descarga elétrica controlada pode parar a fibrilhação.
- $I \approx 0.1A \Rightarrow$ Morte devida a Fibrilhação. Reanimação possível com massagem cardíaca e respiração artificial.
- $I > 0.2A \Rightarrow$ Morte devida a paragem cardíaca e queimaduras graves (em função da exposição.)
- Resistência da pele: $1k\Omega$ (molhada) $< R < 0.5M\Omega$ (seca)
- Resistência interna: $100\Omega < R < 500\Omega$

6.3.7 Galvanómetros

- 1762-Luigi Galvani (Usa pernas de rã para detetar correntes elétricas)
- 1820-Hans Oersted (Utiliza o efeito duma corrente elétrica numa bússola)
- 1820-André Ampère (Utiliza a força atrativa entre dois condutores paralelos com correntes no mesmo sentido)

6.3.8 Experiência de Tolman: Razão Carga/Massa do eletrão.

Determinação da razão Carga/Massa das partículas que transportam a eletricidade medindo a diferença de potencial nas extremidades de uma barra condutora acelerada (por exemplo por rotação). A força centrífuga sobre as cargas livres é $\vec{F}_{cf} = m\vec{\omega} \times (\vec{\ell} \times \vec{\omega})$. Em regime estacionário $\vec{F}_{tot} = e\vec{E} + \vec{F}_{cf} = 0$ donde $e \frac{\Delta V}{\ell} = m \ell \omega^2$. Medindo ℓ, ω e ΔV obtém-se

$$\frac{e}{m} = \frac{\omega^2 \ell^2}{\Delta V} \approx 1.76 \times 10^8 \frac{C}{g}$$

6.4 Lei de Ohm: $\vec{J} = \sigma_e \vec{E}$

Num condutor, a aplicação de um campo elétrico exterior \vec{E} gera movimentos de carga que dão origem a uma corrente com densidade \vec{J} que em muitos casos é proporcional e no sentido do campo elétrico. A constante de proporcionalidade σ_e designa-se **Condutividade Elétrica**. Note-se que nem todas as correntes estão necessariamente associadas a um campo elétrico, em particular para campos não estacionários de variação rápida esta associação deixa de ser válida.

Definição 6.4.1 — Lei de Ohm.

Em materiais condutores, se existir um campo elétrico estacionário \vec{E} no seu interior pode-se observar o aparecimento de uma corrente elétrica com densidade $\vec{J} = \sigma_e \vec{E} \left(\frac{A}{m^2} \right)$.

Definição 6.4.2 — Resistência Elétrica R ($\Omega = Ohm$).

- A **Resistividade** ρ_e (Ωm) dum condutor é a **Resistência** de um cubo de lado unitário ao transporte de corrente entre duas faces opostas.
- A **Condutividade** elétrica σ_e é o inverso da Resistividade: $\sigma_e = \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{S}{m} \right)$, onde $S = Siemens = \Omega^{-1} = Mho$
- A resistência R dum condutor de comprimento ℓ , secção S e condutividade σ_e constantes é $R = \frac{\ell}{\sigma_e S}$.
- Em geral, para um condutor parametrizado unicamente pelo comprimento ℓ entre A e B ,

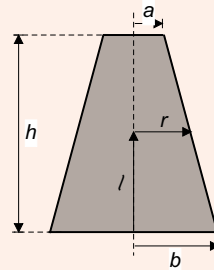
de condutividade σ_c e secção $S(\ell)$, a sua resistência é

$$R_{AB} = \int_{AB} \frac{1}{\sigma_e S(\ell)} d\ell$$

■ Exemplo 6.1 — Resistência de um tronco de cone.

Exercício 6.3

Um tronco cónico recto de altura h e bases circulares de raios a, b é constituído por um material que possui uma resistividade ρ_e . Se for percorrido por uma corrente no sentido do eixo, qual é a resistência que apresenta?



Resposta 6.3

Uma secção axial do cone revela que o raio r das secções circulares transversais é função da distância a uma das bases de acordo com equação

$$r(\ell) = \frac{(a-b)}{h} \ell + b$$

A superfície $S(\ell)$ de cada secção transversal do cone é

$$S(\ell) = \pi r(\ell)^2 = \pi \left(\frac{(a-b)}{h} \ell + b \right)^2$$

pelo que a resistência do tronco cónico deve ser

$$R = \int_0^h \frac{\rho_e}{S(\ell)} d\ell = \frac{\rho_e}{\pi} \int_0^h \frac{1}{\left(\frac{(a-b)}{h} \ell + b \right)^2} d\ell = \frac{\rho_e}{\pi} \frac{h}{ab}$$

6.4.1 Lei de Ohm Macroscópica: $\mathcal{V} = Ri$

Diferença de potencial \mathcal{V} e Queda de Potencial ohmica: $\mathcal{V} \equiv -\delta V$

A Lei de Ohm local pode ser integrada para se obter a Lei de Ohm macroscópica. De facto basta substituir $\vec{E} = \frac{1}{\sigma_e} \vec{J}$ num integral de caminho ao longo dum condutor filiforme e lembrar que a resistividade $\rho_e = \frac{1}{\sigma_e}$ se relaciona com a resistência de um segmento de secção S e comprimento ℓ por $R = \int \frac{\rho_e}{S} d\ell$.

$$\mathcal{V} = -\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int \frac{1}{\sigma_e} \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = i \int \frac{\rho_e}{S} d\ell = Ri$$

Uma outra forma é dedutível da relação entre corrente e densidade de corrente. A corrente

que atravessa uma secção S de um condutor com densidade de corrente \vec{J} é, assumindo um alinhamento $\vec{n} d\ell = d\vec{\ell}$ e um campo \vec{E} uniforme na secção S ,

$$i = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_S \sigma_e \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\sigma_e S}{d\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{d\mathcal{V}(\ell)}{dR(\ell)}$$

$$\Rightarrow \int_{AB} i dR(\ell) = \int_{AB} d\mathcal{V}(\ell) \quad \therefore \quad R_{AB} i = \mathcal{V}_{AB}$$

6.4.2 Caracterização de Condutores

- Materiais não-lineares : Díodo, Transístor, Díodo de Zener
- Supercondutores ($R \equiv 0$) : Óxidos de Tálho (125K), Bi-Sr-Ca-Cu (105K), Y-Ba-Cu (92K)
- Semicondutores : tipo-n (Si-P) tipo-p (Si-B)

6.4.3 Efeito Termoelétrico

6.4.3.1 Coeficiente de resistividade Térmica $\alpha_e = \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dT}$

Material	Resistividade (Ωm)	Coefficiente Térmico ($^{\circ}C^{-1}$)
Prata	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Cobre	1.70×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Ouro	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
Aluminio	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Tungstenio	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Ferro	1.0×10^{-7}	5.0×10^{-3}
Platina	1.1×10^{-7}	3.92×10^{-3}
Chumbo	2.2×10^{-7}	3.9×10^{-3}
Ni-Cromio	1.5×10^{-6}	4.0×10^{-4}
Carbono	3.5×10^{-5}	-5.0×10^{-4}
Germanio	4.6×10^{-1}	-4.8×10^{-2}
Silica	6.4×10^2	-7.5×10^{-2}
Vidro	10^{10} a 10^{14}	
Borracha	1.0×10^{13}	
Enxofre	1.0×10^{15}	
Quartzo (fundido)	7.5×10^{17}	

Código de cores em resistências

Cor	Preto	Castanho	Vermelho	Laranja	Amarelo	Verde	Azul	Violeta	Cinzeno	Branco	Dourado	Prata	Incolor
Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
Potência	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{-1}	10^{-2}	
Toler.											5%	10%	20%

Figura 6.10: As duas primeira cores indicam os dois primeiros algarismos do valor da resistência, a terceira a potência de 10 a multiplicar. A última cor indica a tolerância deste valor em Ω .

6.4.4 Resistências em Série e Paralelo

$$R_s = \sum_{i=1}^N R_i \quad ; \quad R_p = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$$

6.4.5 Força Eletromotriz: $\mathcal{E}_e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Enquanto os campos elétricos em condutores são conservativos, dentro de baterias com eletrólitos o mesmo não se verifica: de facto, se $\vec{E}_{int} = -\nabla V$, então \vec{E}_{int} apontaria no sentido do eléctrodo de potencial mais elevado para o potencial mais baixo, acelerando assim a igualização do potencial nos eléctrodos ao movimentar mais cargas negativas para o eléctrodo positivo. Ora é precisamente o contrário que acontece, i.e. a função de uma bateria ou pilha é de manter a diferença de potencial nos eléctrodos, removendo cargas negativas do eléctrodo positivo para o negativo. Assim $\vec{E}_{int} \neq -\nabla V$ aponta no sentido "errado", i.e. do eléctrodo negativo para o positivo. A força eletromotriz respetiva $\mathcal{E}_b = \int_{-+} \vec{E}_{int} \cdot d\vec{\ell}$ deve assim contrariar a "queda de potencial" associada ao sentido da corrente i . Como ao longo de um circuito fechado se deve ter $\sum_i \mathcal{V}_i = 0$, onde $\mathcal{V}_i = -\Delta V_i$ representa a queda de potencial ao atravessar o elemento "i" do circuito, deve-se verificar

$$\sum_{j \neq b} \Delta V_j + \sum_b \mathcal{E}_b = 0$$

Note-se que $\mathcal{E}_{em} = \sum_b \mathcal{E}_b$ porque na realidade se considerarmos \vec{E} o campo total no circuito como a sobreposição de uma parte conservativa \vec{E}_{ext} e outra não conservativa \vec{E}_{int} , a contribuição da parte conservativa é nula porque $\oint \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{\ell} = 0$. Obtemos assim uma expressão da 2ª Lei de Kirchoff:

$$\sum_{j \neq b} \mathcal{V}_j = \sum_b \mathcal{E}_b$$

Obviamente, nem todas as forças eletromotrizes **fem** em circuitos provêm de pilhas, e um caso em que é assim é quando existem campos magnéticos variáveis no tempo $\vec{B}(t)$, ou seja sempre que as correntes ou tensões aplicadas variem no tempo. Nessa altura

$\nabla \times \vec{E}_{ext} = -\frac{\partial \vec{B}_{ext}}{\partial t}$ ao longo do circuito, e podemos verificar que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \nabla \times \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{S} + \oint_{\Gamma} \vec{E}_{int} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{S} + \sum_b \mathcal{E}_b$$

Mas $\iint_S \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{S} = \Phi$ é o fluxo magnético através do circuito e $-\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}_{im}$ a força magnetomotriz de indução. Concluimos assim que nestes casos $\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{em} + \mathcal{E}_{im}$. Esta força magnetomotriz \mathcal{E}_{im} inclui a que é originada pela corrente do próprio circuito nos elementos indutivos deste, já que para cada indutância "i" o fluxo que a atravessa $\phi_k(t) = \mathcal{L}_{kk} i_k(t) + \sum_i \mathcal{L}_{ik} i_i(t)$

contribui para o fluxo total Φ no circuito. Em geral encontramos nos circuitos a situação em que $\mathcal{L}_{kk} \gg \mathcal{L}_{ik}$ e em que não existem campos magnéticos variáveis exteriores ao circuito, pelo que os efeitos de indução magnética ocorrem essencialmente dentro dos enrolamentos do circuito. Assim sendo, temos finalmente a equação

$$\sum_{j \neq b, k} \mathcal{V}_j = \sum_b \mathcal{E}_b^{(int.)} + \sum_k \mathcal{E}_k^{(i)}$$

Tendo em conta agora que os elementos Ohmicos incluídos nos \mathcal{V}_j são resistências e condensadores, podemos desde já escrever

$$\mathcal{V}_r = \mathcal{R}_r i_r(t)$$

para as resistências e

$$\mathcal{V}_k = \frac{1}{C_k} \int_{t_0}^t i_k(\tau) d\tau$$

para as capacidades, enquanto

$$\mathcal{E}_k^{(i)} = -\frac{d\phi_k}{dt} = -\mathcal{L}_{kk} \frac{di_k(t)}{dt}$$

para as indutâncias. Quando só há uma maneira de atravessar o circuito, todas as correntes são iguais $i_j = i$, pelo que obtemos a seguinte equação do circuito:

$$\sum_b \mathcal{E}_b - \left(\sum_k \mathcal{L}_{kk} \right) \frac{di(t)}{dt} = \left(\sum_r \mathcal{R}_r \right) i(t) + \left(\sum_k \frac{1}{C_k} \right) \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

ou seja, designando por R , C , L as respetivas equivalências de séries de resistências, capacidade e indutâncias,

$$\sum_b \mathcal{E}_b = R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + L \frac{di(t)}{dt}$$

Quando há mais de uma maneira de percorrer o circuito sem repetições, existe uma equação destas para cada caminho fechado, mas aparecem também correntes sci_i incógnitas resultantes da separação de caminhos.

6.4.5.1 Leis de Kirchhoff

1ª- A soma algébrica das correntes convergindo para num nó é zero :

$$\sum_{\alpha} i_{\alpha} = 0$$

2ª- A soma algébrica das quedas de potencial Ohmicas e Capacitivas em qualquer circuito fechado iguala o total de f.e.m internas e indutivas no circuito:

$$\sum_{\beta} \mathcal{E}_{\beta} = \sum_{\alpha} \mathcal{V}_{\alpha}$$

6.4.5.2 Circuito RC em série com f.e.m. \mathcal{E}_{tot} constante.

- Capacidade: $\mathcal{V}_C = \frac{Q}{C}$
- Resistência: $\mathcal{V}_R = R \frac{dQ}{dt}$
- Força Eletromotriz: $\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{V}_C + \mathcal{V}_R = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt}$
 $\therefore Q(t) = C \mathcal{E}_{tot} \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) \quad \& \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}_{tot}}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$

6.4.5.3 Potência e Eficiência

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} \simeq \frac{q\delta N}{\Delta t} \mathcal{V} = i \mathcal{V}$$

- Potência útil: $\mathcal{P} = i \mathcal{V}$
- Dissipação Joule: $\mathcal{P}_d = R i^2$
- Eficiência: $\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P} + \mathcal{P}_d} \implies \eta = \frac{1}{1 + \frac{R\mathcal{P}}{\mathcal{V}^2}} \quad \therefore \quad \text{Linhas de Alta-Voltagem são mais eficientes.}$

Referências

- [1] O. Jefimenko. *Electricity and Magnetism: An Introduction to the Theory of Electric and Magnetic Fields*. 1998 (ver página 85).
- [2] J. D. Kraus e K. R. Carver. *Electromagnetics*. McGraw-Hill, 1973 (ver página 165).

IV

Magnetostatica

7	Magnetismo	181
7.1	Forças Eletromagnéticas entre cargas e campos	
7.2	Densidade de Fluxo Magnético \vec{B} criado por $q_1 \vec{v}$	
7.3	Força Magnética em condutores e correntes:	
7.4	Lei de Biot-Savart:	
7.5	Aplicações da Lei de Biot-Savart	
7.6	Lei de Ampère:	
7.7	O Efeito de Hall	
7.8	Força Magnética em condutores e correntes:	
7.9	Momento Magnético e Binários de Força em condutores e correntes	
8	Indução Magnética e Campos na Matéria	211
8.1	Lei de Faraday e Lei de Lenz	
8.2	Lei de Ampère Geral : $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	
8.3	Energia no campo magnético	
8.4	Potencial Vetor na Gauge de Lorentz $\nabla \cdot \vec{A} = 0$	
8.5	Campo magnético \vec{H} na matéria :	



7. Magnetismo

Conteúdo

7.1	Forças Eletromagnéticas entre cargas e campos	182
7.1.1	Forças entre cargas em movimento	182
7.1.2	Força de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	182
7.2	Densidade de Fluxo Magnético \vec{B} criado por $q_1 \vec{v}$	184
7.2.1	Magnitude relativa da parte elétrica e magnética da Força de Lorentz: . . .	185
7.3	Força Magnética em condutores e correntes:	185
7.3.1	Exemplos de Campo Magnético ($1 \text{ Gauss}(G) = 10^{-4} \text{ Tesla}(T)$)	186
7.4	Lei de Biot-Savart:	186
7.4.1	Campo de um condutor linear infinito	187
7.4.2	Lei de Biot-Savart para distribuições contínuas de corrente.	193
7.5	Aplicações da Lei de Biot-Savart	194
7.5.1	Campo Magnético de um Anel de Corrente I com raio a	194
7.6	Lei de Ampère:	196
7.6.1	Campo de uma corrente retilínea uniforme	197
7.6.2	Campo no interior de um solenóide infinito com n_1 espiras por metro. . . .	199
7.7	O Efeito de Hall	201
7.8	Força Magnética em condutores e correntes:	202
7.8.1	Força sobre um circuito fechado Γ	203

7.8.2 Força Nula Sobre Corrente em campo homogéneo 204
 7.9 **Momento Magnético e Binários de Força em condutores e correntes** 207
 7.9.1 Binário sobre um circuito fechado Γ 207

7.1 Forças Eletromagnéticas entre cargas e campos

7.1.1 Forças entre cargas em movimento

Força numa carga q localizada em \vec{r} deslocando-se com velocidade constante \vec{v} , devido a uma carga q_1 na origem quando se desloca com velocidade \vec{v}_1 constante.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq_1}{r^2} \vec{v} \times \left(\vec{v}_1 \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right)$$

onde μ_0 designa a Permeabilidade Magnética do vácuo: $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \left(\frac{N}{A^2}\right)$

7.1.2 Força de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

A parte Magnética da Força de Lorentz não realiza trabalho sobre a carga:

$$\vec{F}_e(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}); \quad \vec{F}_m(\vec{r}) = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}); \quad \vec{v} \cdot \vec{F}_m = \mathcal{P}_m \equiv 0$$

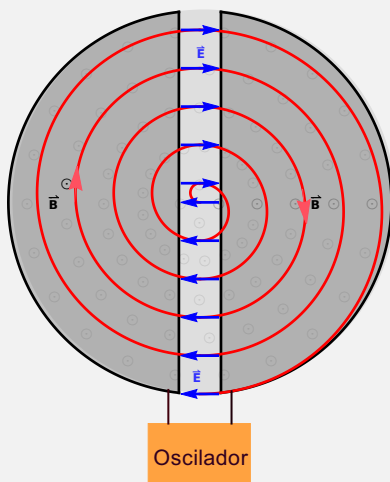
Podemos ainda escrever uma densidade volúmica de Força como

$$d\vec{F} = (\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV$$

e de forma análoga uma densidade linear de força

$$d\vec{F} = \lambda dl \vec{E} + I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Exemplo 7.1 — Ciclotrão.



$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} & \vec{B} &= B_z \vec{e}_z \\ \vec{F}_{cp} &= m \vec{\omega} \times \vec{v} & \vec{F}_m &= q \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{F}_{cp} &= \vec{F}_m & -m\omega^2 \vec{r} &= -q\omega B_z \vec{r} \\ \omega &= \frac{q}{m} B_z & T &= \frac{2\pi m}{q B_z} \end{aligned}$$

A trajetória de uma partícula carregada de carga q e massa m num campo magnético constante \vec{B} que é perpendicular inicialmente à sua velocidade \vec{v}_0 é circular num plano perpendicular a \vec{B} . De

facto o movimento é uniforme e a aceleração é perpendicular à velocidade.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}_m = \frac{q}{m} \vec{p} \times \vec{B} \\ \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{dp^2}{dt} = \frac{q}{m} \vec{p} \cdot (\vec{p} \times \vec{B}) \equiv 0 \quad \therefore \quad p^2 = p_o^2 = C^{te} \\ \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Assim se conclui que o movimento se dá todo no plano perpendicular a \vec{B}

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{p} \cdot \vec{B})}{dt} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{B} = \frac{q}{m} (\vec{p} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} \cdot \vec{B} = \vec{p}_o \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{p} \times \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{q}{m} \vec{p} \times (\vec{p} \times \vec{B}) = -\frac{q}{m} p_o^2 \vec{B}\end{aligned}$$

e que a sua curvatura é constante

$$\vec{p} \times \vec{F}_m = -\frac{q}{m} p_o^2 \vec{B} = \vec{C}^{te} \quad \Rightarrow \quad |\vec{p} \times \vec{F}_m| \propto \frac{1}{R} = C^{te}$$

A aceleração também tem magnitude constante:

$$\left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|^2 = \left(\frac{q}{m} \right)^2 (\vec{p} \times \vec{B}) \cdot (\vec{p} \times \vec{B}) = \left(\frac{q}{m} \right)^2 \vec{p} \cdot (\vec{B} \times (\vec{p} \times \vec{B})) = \left(\frac{q}{m} \right)^2 p_o^2 B^2 = C^{te}$$

Um movimento plano com aceleração constante em magnitude e perpendicular à velocidade em todos os pontos é um **movimento circular e uniforme**.

$$(\vec{r} - \vec{r}_c) \cdot \vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{r} - \vec{r}_c) \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{d(\vec{r} - \vec{r}_c)}{dt} \cdot \vec{p} = -\frac{p_o^2}{m} \quad \therefore \quad |\vec{r} - \vec{r}_c| = R = \frac{p_o}{qB}$$

Vamos supor que na posição \vec{r} a partícula tem momento $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$.

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= \frac{q}{m} \vec{p} \times \vec{B} = \frac{q}{m} (p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y) \times B_z \vec{e}_z = \frac{q}{m} B_z (-p_x \vec{e}_y + p_y \vec{e}_x) \\ \begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = \frac{q}{m} B_z p_y \\ \frac{dp_y}{dt} = -\frac{q}{m} B_z p_x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} p_x = X \sin\left(\frac{q}{m} B_z t + \alpha\right) \\ p_y = X \cos\left(\frac{q}{m} B_z t + \alpha\right) \end{cases} \quad \begin{cases} (X^2 = p_o^2) \\ (\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{p_{ox}}{p_{oy}}\right)) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 - \frac{m p_o}{q B_z} \cos\left(\alpha + \frac{q B_z t}{m}\right) \\ y(t) = C_2 + \frac{m p_o}{q B_z} \sin\left(\alpha + \frac{q B_z t}{m}\right) \end{cases}$$

Exercício 7.1 — Ciclotrão.

Considere o caso do ciclotrão, em que partículas alfa de massa $m_\alpha = 6.72 \times 10^{-27} \text{ Kg}$ são injetadas num plano perpendicular a um campo magnético uniforme de magnitude 1.3 T . Assumindo que as partículas são finalmente extraídas quando o raio da sua trajetória atinge os 70 cm , determine a energia máxima com que as partículas saem. Assumindo que em cada meia volta as partículas sofrem a aceleração brusca causada por uma queda de potencial de 1 kV determine quantas voltas cada partícula dá antes de sair, e quanto tempo o leva a fazer.

- Movimento circular uniforme: Força Aplicada = Força Centrípeta

$$q v B = \frac{m v^2}{r} \quad ; \quad v = \frac{q r B}{m} = \frac{1.3 \times 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.70}{6.7 \times 10^{-27}} = 4.3 \times 10^7 \frac{m}{s}$$

- Energia final

$$E_k = \frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} 6.7 \times 10^{-27} \times (4.3 \times 10^7)^2 = 6.2 \times 10^{-12} \text{ J} = 38.7 \text{ MeV}$$

- Frequência do movimento é constante

$$v = \frac{q r B}{m} = 2\pi f r \quad ; \quad f = \frac{q B}{2\pi m} = \frac{1.3 \times 2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{2\pi \times 6.7 \times 10^{-27}} = 9.9 \text{ MHz}$$

- Número de voltas completas (em cada volta a partícula ganha $\Delta E_\alpha = 2 \times 2 \text{ keV}$)

$$N = \frac{E_k}{\Delta E_\alpha} = \frac{38.7 \times 10^6}{4 \times 10^3} = 9675$$

- Tempo total para completar estas voltas

$$T_{tot} = \frac{N}{f} = \frac{9675}{9.9 \times 10^6} = 0.97 \text{ ms}$$

7.2 Densidade de Fluxo Magnético \vec{B} criado por $q_1 \vec{v}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \left(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o q_1}{4\pi r^2} \vec{v}_1 \times \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \left(\frac{N}{Am} \equiv T (\text{Tesla}) \right)$$

7.2.1 Magnitude relativa da parte elétrica e magnética da Força de Lorentz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{qq_1}{r^2} \vec{v} \times \left(\vec{v}_1 \times \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \right) = \mu_o \epsilon_o \vec{v} \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{F}_e(\vec{r}) \right) \\ \mu_o \epsilon_o = \frac{1}{c^2} \implies \frac{F_m}{F_e} = \frac{vv_1}{c^2} = \frac{vv_1}{9 \times 10^{16}} \end{array} \right.$$

(velocidades em $\frac{m}{s}$)

7.3 Força Magnética em condutores e correntes:

Na presença de campos magnéticos, as correntes em condutores originam forças sobre estes devido à componente magnética \vec{F}_m da força de Lorentz.

Considerando a força sobre um segmento $d\vec{\ell}$ do condutor de secção $\Delta\vec{S}$ atravessada por uma corrente I , sabemos que todas as $nq\Delta\vec{S} \cdot d\vec{\ell}$ cargas de condução aí contidas vão transmitir uma força $d\vec{F}_m$ proporcional a $\vec{v} \times \vec{B}$, onde $\vec{v} \parallel d\vec{\ell}$ representa a velocidade média de deslocamento das cargas de corrente.

$$d\vec{F}_m = (nq\Delta\vec{S} \cdot d\vec{\ell}) \vec{v} \times \vec{B} = (nq\Delta\vec{S} \cdot \vec{v}) d\vec{\ell} \times \vec{B} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_m = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Quando \vec{B} é constante, num circuito fechado

$$\vec{F}_m = I \left(\oint d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = 0$$

A lei de Biot-Savart estabelece a relação entre uma corrente I que percorre um circuito condutor γ parametrizado por $\vec{\ell}(s)$ e o campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ criado por essa corrente num ponto arbitrário \vec{r} do espaço.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \oint_{\gamma} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3}$$

Para chegar a esta formula podemos seguir os seguintes passos: para um condutor com n cargas móveis q por unidade de volume tem-se

- Carga total no segmento de condutor $d\vec{\ell}$ com secção $\Delta\vec{S}$:

$$\Delta Q = nq\Delta\vec{S} \cdot d\vec{\ell}$$

- Corrente Eléctrica:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nq\Delta\vec{S} \cdot \vec{v}_d \equiv \vec{J} \cdot \Delta\vec{S}$$

- Densidade de Corrente :

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

- Em geral pode-se fazer a correspondência

$$I d\vec{\ell} \iff \vec{J} dV$$

Campo elementar criado por um segmento de corrente num fio $I d\vec{\ell}$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{(nq\Delta\vec{S} \cdot d\vec{\ell})}{r^2} \vec{v}_d \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{(nq\vec{v}_d \cdot \Delta\vec{S})}{r^2} d\vec{\ell} \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\mu_o I}{4\pi r^2} d\vec{\ell} \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Campo elementar criado por um elemento de corrente em volume $\vec{J} dV$

$$d\vec{B}(\vec{r}, \vec{\ell}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{\ell}) \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} dV(\vec{\ell})$$

7.3.1 Exemplos de Campo Magnético ($1 \text{ Gauss}(G) = 10^{-4} \text{ Tesla}(T)$)

- Campo Magnético Terra: $5 \times 10^{-5} T = 0.5 G$
- Campos em Laboratório: $2.5 T = 25 kG$
- Magnetes Supercondutores: $30. T = 300 kG$
- O comprimento de onda λ de campos EM radiantes com frequências entre os 50 a 60 Hz é $\frac{c}{\nu} = \lambda \approx 5000 Km$.
- A potência máxima radiada por linhas de alta tensão é $\mathcal{P}_{max} \approx 10^{-10} \frac{\mu W}{cm^2}$.
- Comparativamente, a potência máxima radiada pela Lua cheia é $\mathcal{P}_{Lua} = 2 \times 10^{-1} \frac{\mu W}{cm^2}$.
- A 50 Hz são necessários campos \vec{B} de intensidade $> 5 \text{ Gauss}$ para induzir correntes elétricas no corpo humano.

- Na vizinhança de linhas de alta tensão (115 – 765 kV) $\left[\begin{array}{l} B \approx 10 \mu T \\ E \approx 10^4 \frac{V}{m} \end{array} \right]$

- A 10m de linhas de distribuição (12 kV) $\left[\begin{array}{l} B \approx 0.2 - 1. \mu T \\ E \approx 2 - 20 \frac{V}{m} \end{array} \right]$

- Nas residências, a centímetros dos eletrodomésticos $\left[\begin{array}{l} B \approx 100 \mu T \\ E \approx 200 \frac{V}{m} \end{array} \right]$

- Nas residências, no meio da divisão $\left[\begin{array}{l} B \approx 0.02 \mu T \\ E \approx 2 \frac{V}{m} \end{array} \right]$

- Os aparelhos que geram campos magnéticos maiores são : torradeiras, cobertores elétricos, aspiradores, relógios elétricos, varinhas mágicas.

7.4 Lei de Biot-Savart:

A observação por Oersted de que uma corrente elétrica afetava a orientação de bússolas na sua vizinhança levou a duas conclusões preliminares: o campo magnético é proporcional à

corrente (magnitude e sentido), e inversamente proporcional à distância desta, i.e.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_B$$

Definição 7.4.1 — Lei de Biot-Savart.

O campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ criado num ponto do espaço \vec{r} por uma corrente I que percorre um condutor γ descrito por $\vec{\ell} : \mathcal{I} \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode ser calculado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3}$$

- Carga total no segmento de condutor $d\vec{\ell}$ com secção $\Delta\vec{S}$: $\Delta Q = Nq\Delta\vec{S} \cdot d\vec{\ell}$
- Corrente Elétrica: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq\Delta\vec{S} \cdot \vec{v}_d \equiv \vec{J} \cdot \Delta\vec{S}$
- Densidade de Corrente : $\vec{J} = Nq\vec{v}_d$
- Em geral : $I d\vec{\ell} \Leftrightarrow \vec{J} dV$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(Nq\Delta\vec{S} \cdot d\vec{\ell})}{r^2} \vec{v}_d \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(Nq\Delta\vec{S} \cdot \vec{v}_d)}{r^2} d\vec{\ell} \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} d\vec{\ell} \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

- Para uma distribuição em volume $\vec{J}(\vec{\xi})$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{\xi}) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} dV(\vec{\xi})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{\xi}) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} dV(\vec{\xi})$$

7.4.1 Campo de um condutor linear infinito

Num fio retilíneo infinito, o campo magnético tem que ser perpendicular ao fio e tangencial a círculos centrados no fio por razões de simetria.

Por argumentos de simetria podemos concluir que o campo \vec{B} deve ser tal que à distância r do eixo \vec{e}_z (coincidente com o eixo do condutor) as componentes $\{B_\rho, B_\varphi, B_z\}$ do campo \vec{B} em coordenadas cilíndricas não devem depender do ângulo azimutal φ (φ é o ângulo que a projeção horizontal de \vec{r} faz com o eixo \vec{e}_x). De facto, rotações de ângulo arbitrário φ do condutor em torno do seu eixo \vec{e}_z deixam a corrente invariante, pelo que o campo também deve permanecer invariante no mesmo ponto do espaço, pese embora o facto que o seu azimute φ se tenha alterado. Assim

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho(\rho, z) \vec{e}_\rho(\varphi) + B_\varphi(\rho, z) \vec{e}_\varphi(\varphi) + B_z(\rho, z) \vec{e}_z$$

Como o condutor é retilíneo e infinito, as componentes de \vec{B} também não devem depender de z , porque uma translação do condutor na direção do seu eixo \vec{e}_z deixa as correntes invariáveis, pelo que o campo também não se altera no mesmo ponto do espaço embora a cota z tenha mudado.

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi) + B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi(\varphi) + B_z(\rho) \vec{e}_z$$

A seguinte simetria mostra que \vec{B} não tem componente segundo $\vec{e}_\rho(\varphi)$. Uma rotação de 180° em torno do eixo horizontal $\vec{e}_\rho(\varphi)$ passando pelo condutor deixa o condutor na mesma posição mas inverte o sentido da corrente. Quanto ao campo em qualquer ponto do eixo \vec{e}_ρ transforma-se da seguinte forma:

$$\vec{B}(\rho \vec{e}_\rho(\varphi)) = B_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi) + B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi(\varphi) + B_z(\rho) \vec{e}_z$$

$$\mathcal{R}_{\vec{e}_\rho} \downarrow 180^\circ$$

$$\vec{B}'(\rho \vec{e}_\rho(\varphi)) = B_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi) - B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi(\varphi) - B_z(\rho) \vec{e}_z$$

A seguir inverte-se o sentido da corrente $-I \rightarrow I$, repondo a configuração inicial. Como o campo \vec{B}' apenas muda de sinal com a inversão do sentido da corrente, devemos ter sobre o eixo de rotação

$$-\vec{B}'(\rho \vec{e}_\rho(\varphi)) = \vec{B}(\rho \vec{e}_\rho(\varphi))$$

ou seja

$$-B_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi) + B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi(\varphi) + B_z(\rho) \vec{e}_z = B_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi) + B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi(\varphi) + B_z(\rho) \vec{e}_z \implies B_\rho(\rho) = 0$$

A aplicação da Lei de Ampère a um circuito retangular contido num plano vertical passando pelo condutor, consistindo em dois lados verticais e dois horizontais permite verificar que \vec{B} também não tem componente segundo \vec{e}_z . De facto a circulação do campo ao longo deste circuito anula-se porque não é atravessado por correntes. Por outro lado nos segmentos paralelos a $\vec{e}_\rho(\varphi)$ a projeção de \vec{B} anula-se, por isso esses lados não contribuem para a circulação. Dos lados verticais, se fixarmos o mais próximo do eixo e afastarmos o outro indefinidamente, devemos ver que a

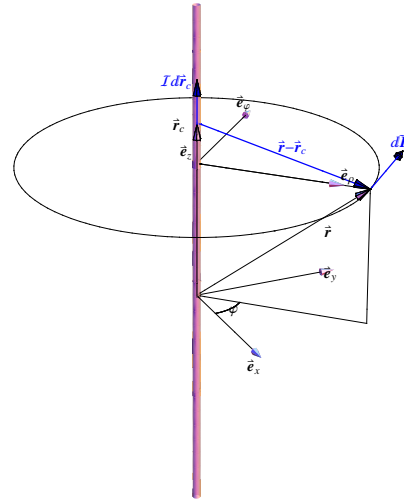


Figura 7.1:

circulação neste último deve decair para zero com a distância, enquanto a do lado fixo permanece constante. Assim esta constante deve ser zero, pelo que $\vec{B} \cdot \vec{e}_z \equiv 0$ em qualquer ponto do espaço.

De acordo com a lei de Ampère a circulação do campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ ao longo de um caminho fechado qualquer Γ é proporcional à soma algébrica das correntes que atravessam qualquer superfície S cujo bordo seja o caminho Γ , ou seja $\partial S \equiv \Gamma$. Simbolicamente, se \vec{r}_Γ designar a posição dos pontos do circuito Γ ,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}_\Gamma) \cdot d\vec{r}_\Gamma = \mu_o I_{int}$$

A constante de proporcionalidade é a permeabilidade magnética do vácuo

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \quad \frac{N}{A^2} \equiv \frac{H}{m}$$

Pela lei de Biot-Savart, um segmento de corrente $I d\vec{r}_c$ na posição \vec{r}_c contribui para o campo no ponto \vec{r} através da formula

$$d\vec{B}(\vec{r}; I d\vec{r}_c, \vec{r}_c) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\vec{r}_c \times (\vec{r} - \vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3}$$

Se $d\vec{r}_c = dz \vec{e}_z$ então o produto externo deve ser perpendicular ao plano vertical passando pelo condutor e o ponto \vec{r} . Se usarmos coordenadas cilíndricas com eixo \vec{e}_z alinhado com o condutor, isto equivale a afirmar o seguinte:

$$\begin{cases} \vec{r}_c = z_c \vec{e}_z & \text{posição no condutor à cota } z \quad ; \\ I d\vec{r}_c = I dz_c \vec{e}_z & \text{elemento de corrente de comprimento } dz \quad ; \\ \vec{r} = \rho \vec{e}_\rho(\varphi) + z \vec{e}_z & \text{posição geral em coordenadas cilíndricas} \quad ; \end{cases}$$

$$d\vec{B}(\vec{r}; I d\vec{r}_c, \vec{r}_c) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dz_c \vec{e}_z \times (\rho \vec{e}_\rho(\varphi) + (z - z_c) \vec{e}_z)}{(\rho^2 + (z - z_c)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \rho dz_c}{(\rho^2 + (z - z_c)^2)^{3/2}} \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho(\varphi)$$

$$d\vec{B}(\vec{r}; I d\vec{r}_c, \vec{r}_c) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \rho dz_c}{(\rho^2 + (z - z_c)^2)^{3/2}} \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

O campo total $\vec{B}(\vec{r})$ é a soma de contribuições $d\vec{B}(\vec{r}; I d\vec{r}_c, \vec{r}_c)$, todas apenas tendo componente segundo $\vec{e}_\varphi(\varphi)$, donde se conclui que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} I \rho \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\rho^2 + (z - z_c)^2)^{3/2}} dz_c \right) \vec{e}_\varphi(\varphi) = B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

Concluimos assim que \vec{B} apenas possui componente $B_\varphi(\rho)$ diferente de zero.

Campo de uma corrente retilínea infinita

A observação por Oersted de que uma corrente elétrica afetava a orientação de bússolas na sua vizinhança levou a duas conclusões preliminares: o campo magnético é proporcional à corrente (magnitude e sentido), e inversamente proporcional à distância desta, i.e.

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{u}_B$$

Assim, num fio retilíneo infinito, o campo magnético tem que ser perpendicular ao fio e tangencial a círculos centrados no fio por razões de simetria.

Inversão de Corrente I + Rotação 180°

Uma inversão de corrente no fio significa que $\vec{B}(\vec{r}) \rightarrow -\vec{B}(\vec{r})$, mas uma rotação de 180° em torno de um eixo perpendicular ao fio e passando por \vec{r} (essencialmente $\vec{e}_r(\varphi)$ num referencial cilíndrico apropriado) volta a repor as condições iniciais do sentido da corrente, mas

- Inversão de corrente I

$$\vec{B}(\vec{r}) \rightarrow -\vec{B}(\vec{r}) = -B_r(\vec{r}) \vec{e}_r - B_\varphi(\vec{r}) \vec{e}_\varphi - B_z(\vec{r}) \vec{e}_z$$

- Rotação de 180° com eixo $\vec{e}_r(\varphi)$

$$-\vec{B}(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}'(\vec{r}) = -B_r(\vec{r}) \vec{e}_r + B_\varphi(\vec{r}) \vec{e}_\varphi + B_z(\vec{r}) \vec{e}_z = \vec{B}(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad B_r(\vec{r}) = 0.$$

Reflexão num plano perpendicular + Inversão de Corrente I

\vec{B} é um pseudovetor ou **vetor axial** (por causa do produto vetorial). No tempo de Öersted, o raciocínio era que, visto num espelho, o sentido de deflexão das bússolas devia obedecer às mesmas regras que no original. Aquando de uma reflexão, o vetor transforma-se no **oposto do refletido**.

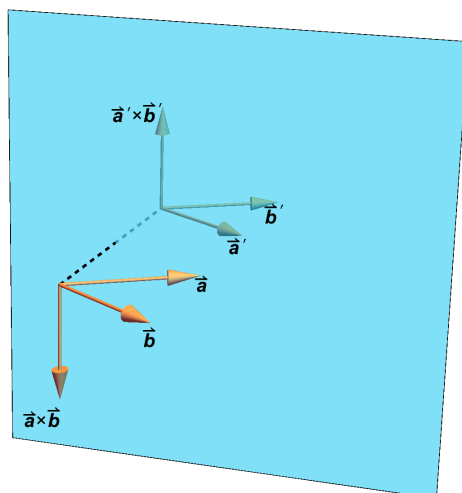


Figura 7.2: Produto vetorial de \vec{a} e \vec{b} e sua reflexão num espelho como um vetor axial. Note que $\vec{a}' \times \vec{b}' = -\vec{a} \times \vec{b}$.

- Reflexão num plano perpendicular ao condutor passando por \vec{r} :

$$\vec{B}'(\vec{r}) = -(B_\varphi(\vec{r}) \vec{e}_\varphi - B_z(\vec{r}) \vec{e}_z)$$

- A inversão da corrente I cria na imagem refletida uma situação idêntica à inicial real, ou seja, $\vec{B}' \rightarrow -\vec{B}'$ e deve-se então ter

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\vec{B}'(\vec{r})$$

$$B_\theta(\vec{r}) \vec{e}_\theta + B_z(\vec{r}) \vec{e}_z = B_\theta(\vec{r}) \vec{e}_\varphi - B_z(\vec{r}) \vec{e}_z$$

o que só é possível com $B_z(\vec{r}) = 0$, pelo que

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(\vec{r}) \vec{e}_\varphi$$

As imagens seguintes ilustram o processo:

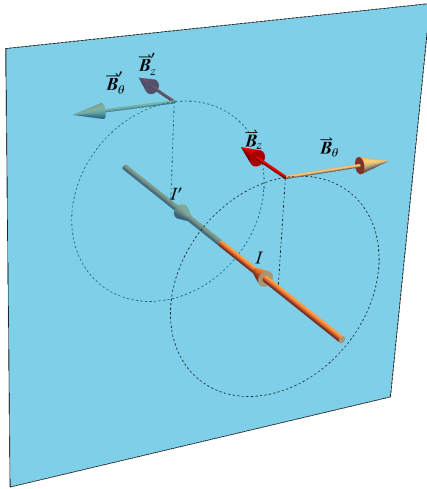


Figura 7.3: Reflexão do campo magnético de uma corrente filiforme I . A corrente refletida é $I' = -I$. Devido à sua natureza axial, a imagem \vec{B}' é o negativo da reflexão normal de um vetor polar.

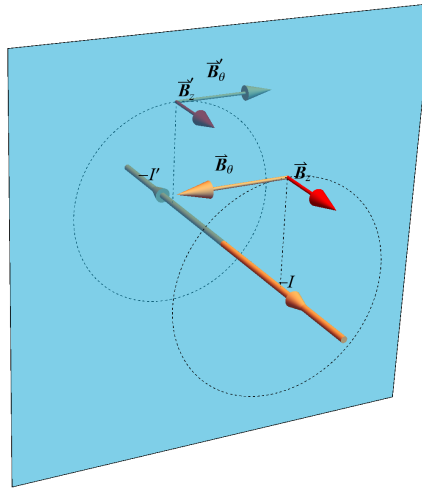


Figura 7.4: Reflexão do campo magnético de uma corrente filiforme $-I$. O campo no espelho devia ser igual ao original na figura 7.3 porque a corrente refletida é $-I' = I$. A componente \vec{B}_z deve ser nula.

Reflexão

Reflexão+Inversão Corrente

Se compararmos o campo da corrente I com o da sua imagem refletida, após a inversão de corrente $I \rightarrow -I$ devíamos ter, na imagem refletida, o mesmo campo que o real original, e do lado real o mesmo campo que o da imagem refletida original. A componente hipotética \vec{B}_z não pode existir porque não fica com a mesma orientação que a original quando se vê a imagem refletida após a inversão de corrente $I' \rightarrow -I' = I$.

$$\vec{\ell} = \ell \vec{e}_z; \quad \vec{r} = r \vec{e}_r; \quad \vec{r} - \vec{\ell} = r \vec{e}_r - \ell \vec{e}_z; \quad |\vec{r} - \vec{\ell}| = \sqrt{r^2 + \ell^2}$$

$$\int \frac{1}{(a^2 + \ell^2)^{3/2}} d\ell = \frac{\ell}{a^2 \sqrt{a^2 + \ell^2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{(r^2 + \ell^2)^{3/2}} d\ell \vec{e}_\theta = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

■ Exemplo 7.2 — Campo no centro de um arco de corrente I com raio a .

O campo no centro do arco não recebe contribuições dos elementos de corrente retilíneos.

$$\vec{\ell} = a \vec{e}_r(\theta); \quad d\vec{\ell} = a d\theta \vec{e}_\theta(\theta);$$

$$\vec{r} = 0; \quad \vec{r} - \vec{\ell} = -\vec{\ell}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(0) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{\theta_o} \frac{I d\vec{\ell} \times (-\vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} = \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_0^{\theta_o} \frac{(a d\theta \vec{e}_\theta) \times (-a \vec{e}_r)}{a^3} \end{aligned}$$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \theta_o \vec{e}_z$$

Quando $\theta_o = 2\pi$ obtemos o campo no centro de um anel de corrente com raio a

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_o I}{2a} \vec{e}_z$$

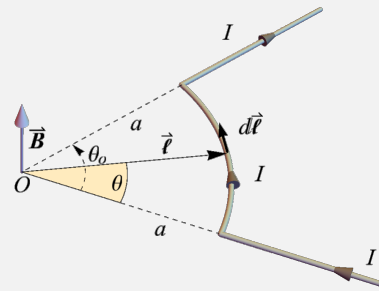


Figura 7.5: Arco de corrente I com raio a

Campo no eixo de uma espira quadrada de lado L

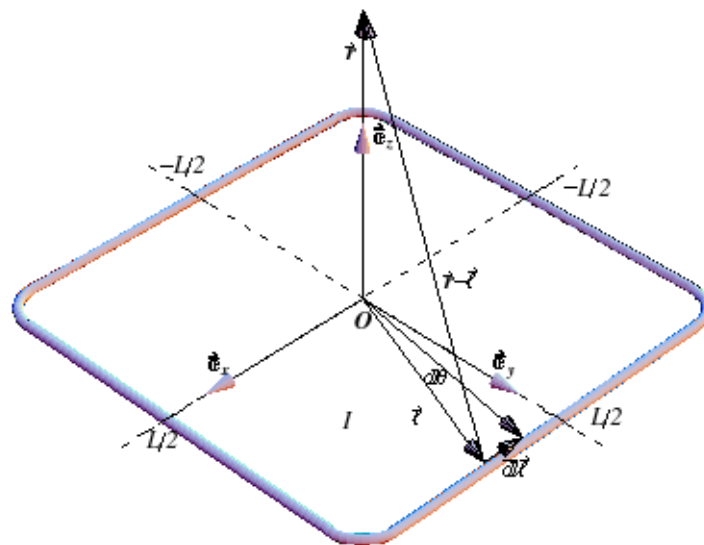


Figura 7.6:

Vamos primeiro considerar a parametrização de um lado da espira, colocando a origem no seu centro e alinhando os lados com os eixos \vec{e}_x, \vec{e}_y . Para $s \in [-1, 1]$, vamos pôr $\vec{\ell}(s) = \frac{L}{2}(\vec{e}_x + s \vec{e}_y)$. Então, tendo em conta que

$$\int \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} ds = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

a expressão do campo é, no centro O da espira onde $\vec{r} = 0$,

$$\begin{aligned}\vec{B}(O) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} = \\ &= \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{L}{2}\right)^{-3} \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} \frac{L}{2} (\vec{e}_x + s\vec{e}_y) \times \left(\frac{L}{2}\vec{e}_y\right) ds = \frac{\mu_o I}{\sqrt{2}\pi L} \vec{e}_z\end{aligned}$$

A contribuição de todos os lados é igual, donde

$$\vec{B}(O) = 2\sqrt{2} \frac{\mu_o I}{\pi L} \vec{e}_z$$

No caso de um ponto no eixo da espira à altura z a expressão do campo reduz-se a

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(1 + \frac{4z^2}{L^2}\right)\sqrt{1 + \frac{2z^2}{L^2}}} \frac{\mu_o I}{\pi L} \vec{e}_z$$

7.4.2 Lei de Biot-Savart para distribuições contínuas de corrente.

Distribuição Linear de Corrente

$$d\vec{B}(\vec{r}, \vec{\ell}) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3}$$

Distribuição Superficial de Corrente

Para correntes superficiais com densidade \vec{J}_s , $d\vec{S}$ tem que ser substituído por $\vec{n} \times d\vec{r}$ onde \vec{n} é a normal à superfície de corrente descrita por \vec{J}_s . Assim, se $\vec{J}_s \parallel d\vec{\ell}$,

$$\begin{aligned}\delta I d\vec{\ell} &= (\vec{J}_s \cdot (\vec{n} \times d\vec{r})) d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \\ &= (d\vec{\ell} \cdot (\vec{n} \times d\vec{r})) \vec{J}_s = \\ &= (\vec{n} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{\ell})) \vec{J}_s = \vec{J}_s dS\end{aligned}$$

onde $dS = \vec{n} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{\ell})$ é um elemento de área na superfície de corrente.

$$d\vec{B}(\vec{r}, \vec{\ell}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{J}_s(\vec{\ell}) \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} dS(\vec{\ell})$$

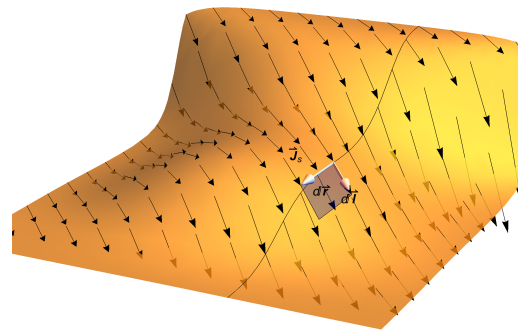


Figura 7.7: A corrente que atravessa um segmento $d\vec{r}$ numa superfície com densidade de corrente superficial \vec{J}_s é $dI = \vec{J}_s \cdot (\vec{n} \times d\vec{r})$, onde \vec{n} é a normal à superfície.

Distribuição Volúmica de Corrente

Para uma distribuição geral de corrente com densidade \vec{J} é possível substituir $I d\vec{\ell}$ por $\vec{J} dV$ na Lei de Biot-Savart: se $\vec{J} \parallel d\vec{\ell}$, um elemento de corrente que atravessa uma secção $\delta\vec{S}$ seria

$$\delta I d\vec{\ell} = (\vec{J} \cdot \delta\vec{S}) d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad \vec{J}(\delta\vec{S} \cdot d\vec{\ell}) = \vec{J} dV$$

Para o cálculo do campo magnético, somar as contribuições de todos os elementos infinitesimais de corrente para o campo em \vec{r} corresponde a integrar em volume a expressão de Biot-Savart com $I d\vec{\ell}$ substituído por $\vec{J} dV$.

$$d\vec{B}(\vec{r}, \vec{\ell}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{\ell}) \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} dV(\vec{\ell})$$

7.5 Aplicações da Lei de Biot-Savart

7.5.1 Campo Magnético de um Anel de Corrente I com raio a

Utilizando a Lei de Biot-Savart pode-se calcular o campo dum anel de raio a percorrido por uma corrente I usando coordenadas cilíndricas $\{\rho, \varphi, z\}$ com origem no seu centro. Este campo só tem componentes B_ρ e B_z devido à simetria da corrente. De facto, uma reflexão do campo num plano vertical passando pelo eixo do anel, seguido de uma inversão de corrente $I \rightarrow -I$, deixaria a distribuição de corrente invariante pelo que o campo \vec{B}'' deve ser igual ao original. Mas o campo \vec{B} , sendo axial, deve ter uma reflexão \vec{B}' que é o negativo da reflexão de um vetor polar coincidente com \vec{B} , pelo que $B'_\varphi = B_\varphi$, e ao inverter a corrente $B_\varphi'' = -B'_\varphi = -B_\varphi = B_\varphi$ donde $B_\varphi = 0$.

7.5.1.1 Campo no Eixo do Anel ($\vec{r} = z \vec{e}_z$)

- Parametrização:

$$\vec{\ell}(\phi) = a \vec{e}_\rho(\phi) \quad ; \quad d\vec{\ell} = a d\phi \vec{e}_\varphi(\phi)$$

$$\vec{r} - \vec{\ell} = z \vec{e}_z - a \vec{e}_\rho(\phi)$$

$$\frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} = \frac{(za \vec{e}_\rho + a^2 \vec{e}_z)}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3}$$

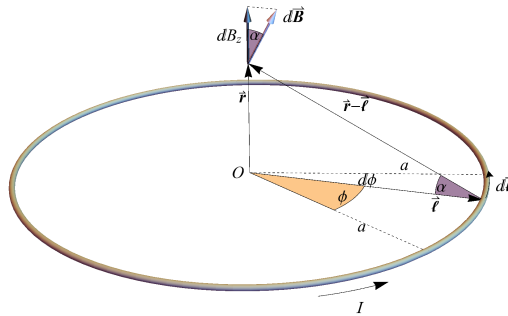


Figura 7.8:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (za \vec{e}_\rho + a^2 \vec{e}_z) d\phi \quad \therefore \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

7.5.1.2 Campo de uma corrente circular num ponto arbitrário ($\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho(\varphi) + z \vec{e}_z$)

Usando a mesma parametrização que anteriormente no caso do anel em coordenadas cilíndricas $\{\rho, \varphi, z\}$, para um ponto arbitrário $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho(\varphi) + z \vec{e}_z$ do espaço, e segmentos do anel

$d\vec{\ell} = a d\phi \vec{e}_\phi(\phi)$, obtém-se em termos de funções elípticas F , E e K :¹

$$\vec{r} - \vec{\ell} = \rho \vec{e}_\rho(\varphi) + z \vec{e}_z - a \vec{e}_r(\phi)$$

$$\frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} = \frac{(az \vec{e}_\rho(\phi) + (a^2 - a\rho \cos(\phi - \varphi)) \vec{e}_z)}{(r^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\phi - \varphi))^{3/2}} d\phi$$

Tendo em conta a simetria de rotação do campo do anel em torno do eixo \vec{e}_z , podemos escolher calcular o campo no plano $\varphi = 0$ sem perda de generalidade:

$$B_\rho(\rho, z) = \frac{\mu_0 z}{2\pi\rho\sqrt{z^2 + (a-\rho)^2}} \left(\frac{z^2 + a^2 + \rho^2}{z^2 + (a+\rho)^2} E\left(\frac{-4a\rho}{z^2 + (a-\rho)^2}\right) - K\left(\frac{-4a\rho}{z^2 + (a-\rho)^2}\right) \right)$$

$$B_\varphi(\rho, z) = 0$$

$$B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{z^2 + (a-\rho)^2}} \left(K\left(\frac{-4a\rho}{z^2 + (a-\rho)^2}\right) - \frac{z^2 - a^2 + \rho^2}{z^2 + (a+\rho)^2} E\left(\frac{-4a\rho}{z^2 + (a-\rho)^2}\right) \right)$$

O potencial vetor \vec{A} , tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, para uma corrente I

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\gamma \frac{I d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{\ell}|}$$

Para o anel de corrente I e raio a

$$\vec{A} = \mathcal{A}_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{z^2 + (a-\rho)^2}} \left((z^2 + a^2 + \rho^2) K\left(\frac{-4a\rho}{z^2 + (a-\rho)^2}\right) - (z^2 + (a-\rho)^2) E\left(\frac{-4a\rho}{z^2 + (a-\rho)^2}\right) \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\varphi}{\partial \rho} \vec{e}_z - \frac{\partial \mathcal{A}_\varphi}{\partial z} \vec{e}_\rho \right)$$

Para $\varphi = 0$, as componentes do campo magnético $\vec{B} = B_\rho(\rho, z) \vec{e}_\rho + B_z(\rho, z) \vec{e}_z$ formam um campo Irrotacional **em coordenadas cartesianas no plano** $\{\rho, z\}$, i.e. no plano vertical passando pelo eixo z . Por isso podemos procurar uma função potencial, não para \vec{B} mas para um seu campo ortogonal

$$\vec{C} = \mathcal{F}(\rho, z) (B_z(\rho, z) \vec{e}_\rho - B_\rho(\rho, z) \vec{e}_z)$$

¹ O integral elíptico de primeira espécie é $F(\phi|m) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-m\sin(\theta)}} d\theta$, sendo $K(m) = F(\frac{\pi}{2}|m)$. O integral elíptico de segunda espécie é $E(\phi|m) = \int_0^\phi \sqrt{1-m\sin(\theta)} d\theta$, sendo $E(m) = E(\frac{\pi}{2}|m)$. Em ambos os casos $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Note-se que $E(0) = K(0) = \frac{\pi}{2}$.

O Fator Integrante $\mathcal{F}(\rho, z)$ que garante que $\nabla \times \vec{C} = 0$ é simplesmente $\mathcal{F}(\rho, z) = \rho$. Podemos então concluir que

$$\vec{C} = \rho \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\varphi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{\partial \mathcal{A}_\varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right) \right) = \nabla \mathcal{A}_\varphi(\rho, z)$$

i.e. as linhas equipotenciais de \mathcal{A}_φ são as linhas de campo de \vec{B} uma vez que $\vec{C} = \nabla \mathcal{A}_\varphi \perp \vec{B}$ em todo o espaço.

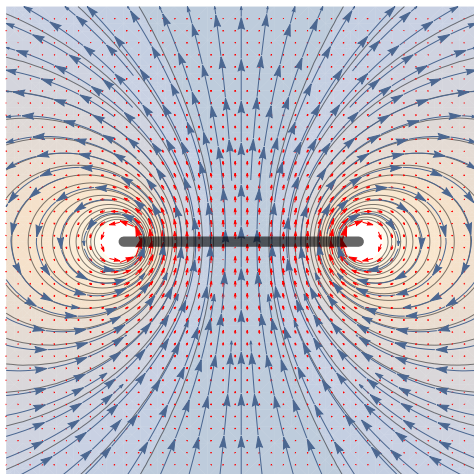


Figura 7.9: A intensidade do campo \vec{B} aumenta à medida que nos aproximamos do anel.

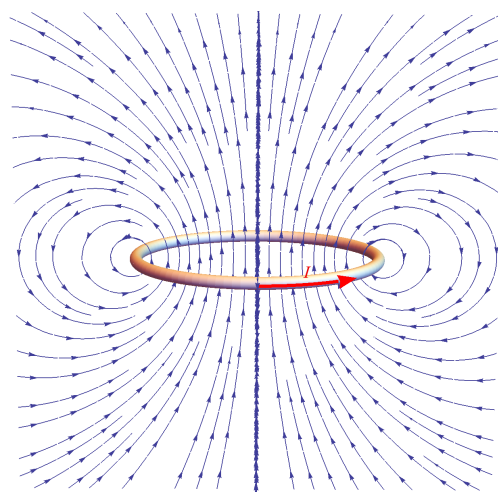


Figura 7.10: Campo magnético de um anel de corrente.

7.6 Lei de Ampère:

Definição 7.6.1 — Lei de Ampère no vazio.

A **circulação** do campo magnético \vec{B} ao longo de um **caminho fechado** γ é proporcional à corrente total que atravessa **qualquer superfície aberta orientada** S_γ cujo bordo ∂S_γ coincide com o caminho γ .

$$\oint_\gamma \vec{B}(\vec{\ell}) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left(\sum_{k=1}^n I_k \right)_{\text{através } S_\gamma} \quad (7.1)$$

- As correntes I_k que atravessam S_γ no sentido da sua orientação têm sinal positivo, senão são consideradas negativas.
- A orientação de S_γ está relacionada com a direção da circulação de γ pela regra da mão direita.^a
- Esta lei é válida apenas para campos magnéticos no vácuo gerados por correntes estacionárias.^b
- A escolha da superfície S_γ é arbitrária porque $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) \equiv 0$.^c

^a Quando o polegar da mão direita aponta na direção positiva da superfície S_γ , a circulação positiva de γ é no sentido do fecho dos restantes dedos.

^b Quando as correntes e campos variam rapidamente no tempo é necessário incluir o fluxo de correntes de

deslocamento $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ através de S_γ .

^c Para duas superfícies S_γ e S'_γ que verifiquem $\partial S_\gamma \equiv \partial S'_\gamma = \gamma$ obtém-se

$$\iint_{S_\gamma} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} - \iint_{S'_\gamma} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}' = \iint_{S_\gamma \oplus S'_\gamma} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = 0$$

7.6.1 Campo de uma corrente retilínea uniforme

Proposição 7.6.1 — Simetrias do campo de uma corrente retilínea infinita.

Para uma corrente retilínea I que se propaga homogeneamente num condutor de raio a na direção \vec{e}_z , de comprimento muito grande comparado com a distância r do eixo ao ponto onde o campo \vec{B} é avaliado, podemos usar as simetrias de um condutor infinito.

- **Translações na direção \vec{e}_z** : significa que as componentes de \vec{B} não devem depender da coordenada z .
- **Rotações em torno do eixo \vec{e}_z** : significa que as componentes de \vec{B} não dependem de θ (em coordenadas cilíndricas) embora \vec{B} dependa de θ através dos versores $\vec{e}_r(\theta)$ ou $\vec{e}_\theta(\theta)$.
- **Rotação de 180° em torno de um eixo horizontal seguida de inversão de corrente $I \rightarrow -I$** : a componente radial do campo deve ser nula.

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_r(r) \vec{e}_r + B_\theta(r) \vec{e}_\theta + B_z(r) \vec{e}_z = -(B_r(r) \vec{e}_r - B_\theta(r) \vec{e}_\theta - B_z(r) \vec{e}_z) \implies B_r(r) = 0$$

- **Reflexão num plano horizontal seguida de inversão de corrente $I \rightarrow -I$** : A componente vertical do campo deve ser nula. Note que \vec{B} é um vetor axial, pelo que uma reflexão $\vec{B} \rightarrow \vec{B}'$ deve ser seguida de uma inversão $\vec{B}' \rightarrow -\vec{B}'$ (i.e. a regra da mão direita num espelho deve ser visualizada como a reflexão da mão esquerda, donde a inversão do sentido do campo refletido)

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta + B_z(r) \vec{e}_z = -(-B_\theta(r) \vec{e}_\theta(\theta) + B_z(r) \vec{e}_z) \implies B_z(r) = 0$$

- Em conclusão, o campo de uma corrente retilínea deve ter apenas componente $B_\theta(r)$ na direção $\vec{e}_\theta(\theta)$ num sistema de coordenadas cilíndricas com eixo \vec{e}_z coincidente com o eixo da corrente.

A aplicação da Lei de Ampère à circulação de \vec{B} ao longo de círculos horizontais centrados no eixo \vec{e}_z e raio r significa que

$$\oint_{\odot} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_{\theta}(r) 2\pi r = \mu_o I_{int}$$

Para $r > a$, a corrente que atravessa o círculo de raio r é toda a corrente no condutor $I_{int} = I$, pelo que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{e}_{\theta}(\theta) \quad (r > a)$$

Para $r < a$, só a corrente englobada pela área do círculo deve ser considerada para I_{int} , ou seja, para uma corrente I uniformemente distribuída por toda a secção do condutor de raio a ,

$$I_{int} = \left(\frac{I}{\pi a^2} \right) \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}$$

pelo que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I_{int}}{2\pi r} \vec{e}_{\theta}(\theta) = \frac{\mu_o I r}{2\pi a^2} \vec{e}_{\theta}(\theta) \quad (r < a)$$

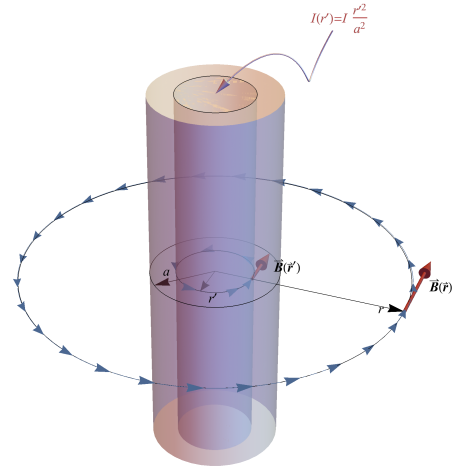


Figura 7.11: Circulação de Ampère para uma corrente retilínea infinita I uniformemente distribuída pela secção de um condutor cilíndrico de raio a .

7.6.1.1 Utilização da Lei de Ampère

Este cálculo pode ser substancialmente encurtado usando a Lei de Ampère neste caso. A circulação do campo \vec{B} numa circunferência horizontal Γ , de raio r centrada no condutor, no sentido do fecho dos dedos da mão direita quando o polegar aponta na direção de I , deve ser proporcional à corrente I que atravessa uma superfície S com bordo $\partial S = \Gamma$. Usando a notação

$$\vec{r}_{\Gamma} = r \vec{e}_{\rho}(\varphi) \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \quad d\vec{r}_{\Gamma} = r \frac{d\vec{e}_{\rho}(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = r \vec{e}_{\varphi}(\varphi) d\varphi$$

obtemos a expressão desta lei como

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}_{\Gamma}) \cdot d\vec{r}_{\Gamma} = \mu_o I \quad \therefore \quad \int_0^{2\pi} B_{\varphi}(r) r d\varphi = 2\pi r B_{\varphi}(r) = \mu_o I$$

Daqui se conclui que, em coordenadas cilíndricas,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{2\pi \rho} \vec{e}_{\varphi}(\varphi) \quad (7.2)$$

7.6.1.2 Cálculo simplificado

O cálculo direto do campo \vec{B} usando a lei de Biot-Savart pode ser simplificado usando um sistema de referência cilíndrico com origem no ponto P à distância r_o do condutor γ onde se quer determinar o campo, e com o eixo \vec{e}_z alinhado com o campo. Sendo a origem no ponto onde se quer determinar o campo tem-se $\vec{r} = \vec{r}_p = 0$. Neste caso $\vec{r} - \vec{r}_c = \vec{\ell}$ representa a posição geral de um segmento $d\vec{\ell}$ do condutor e as seguintes relações são válidas:

$$\ell \cos(\varphi) = r_o \Rightarrow \ell(\varphi) = \frac{r_o}{\cos(\varphi)}$$

$$\vec{\ell} = \ell(\varphi) \vec{e}_\rho(\varphi)$$

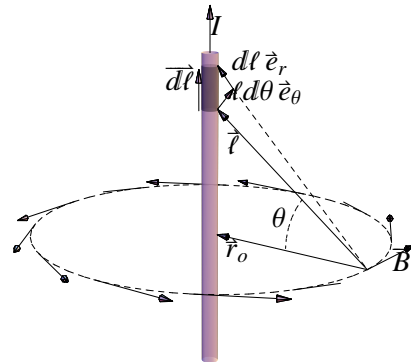
$$d\vec{\ell}(\varphi) = d\ell(\varphi) \vec{e}_\rho(\varphi) + \ell(\varphi) d\varphi \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

$$\vec{B}(r_p) = -\frac{\mu_o}{4\pi} I \int_\gamma \frac{d\vec{\ell}(\varphi) \times \vec{\ell}(\varphi)}{\ell(\varphi)^3}$$

$$\vec{B}(r_p) = \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_\gamma \frac{\vec{e}_z}{\ell(\varphi)} d\varphi$$

$$\vec{B}(r_p) = \frac{\mu_o I}{4\pi r_o} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi \vec{e}_z = \frac{\mu_o I}{2\pi r_o} \vec{e}_z$$

este cálculo é mais útil usar um sistema coordenado cilíndrico com o eixo \vec{e}_z alinhado com o condutor γ , pelo que se deve transformar esta expressão convertendo \vec{e}_z em $\vec{e}_\varphi(\varphi)$ e recuperando a Eq. (7.2).



Após

Figura 7.12: Campo de uma corrente I num condutor retilíneo filiforme.

7.6.2 Campo no interior de um solenóide infinito com n_1 espiras por metro.

7.6.2.1 Simetrias do campo de uma corrente I num solenóide reto infinito com n_1 espiras por metro.

Consideremos as simetrias de um solenóide reto infinito:

- **Simetria de translação** ao longo do eixo \vec{e}_z .
Isto garante que $\vec{B} = \vec{B}(\rho, \phi)$ não depende de z .
- **Simetria de rotação** em torno do eixo \vec{e}_z .
Isto garante que as componentes de $\vec{B} = \mathcal{B}_\rho(\rho) \vec{e}_\rho + \mathcal{B}_\phi(\rho) \vec{e}_\phi + \mathcal{B}_z(\rho) \vec{e}_z$ não dependem de ϕ .
- **Rotação de 180°** em torno de um eixo perpendicular ao \vec{e}_z , e.g. \vec{e}_ρ , acompanhada de uma **inversão de corrente** $I \rightarrow -I$.

Deixa o solenóide com a mesma orientação de corrente e posição espacial.

Numa rotação de 180°, $\vec{B} \rightarrow \vec{B}' = \mathcal{B}_\rho(\rho) \vec{e}_\rho - \mathcal{B}_\phi(\rho) \vec{e}_\phi - \mathcal{B}_z(\rho) \vec{e}_z$. Com a inversão de corrente devemos ter

$$\vec{B}'' = -\mathcal{B}_\rho(\rho) \vec{e}_\rho + \mathcal{B}_\phi(\rho) \vec{e}_\phi + \mathcal{B}_z(\rho) \vec{e}_z$$

Conclui-se então de $\vec{B}'' \equiv \vec{B}$ que $\mathcal{B}_\rho(\rho) = 0$.

Se agora aplicarmos a Lei de Ampère a um circuito circular Γ de raio ρ centrado no eixo \vec{e}_z dentro do solenóide, verificamos que

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{B}_\phi(\rho) 2\pi r = 0$$

porque nenhuma corrente atravessa dentro de Γ , donde $\mathcal{B}_\phi(\rho) = 0$ dentro do solenóide. Finalmente, um circuito retangular γ num plano contendo o eixo \vec{e}_z , com um lado de comprimento ℓ dentro do solenóide e paralelo ao eixo, e o lado oposto fora e muito longe deste, é atravessado $N = n_1 \ell$ vezes pela corrente I , pelo que

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o n_1 \ell I$$

Neste integral de caminho apenas a parte interior e paralela ao eixo \vec{e}_z contribui para a circulação: o lado oposto paralelo a \vec{e}_z pode ser considerado suficientemente longe para ter uma contribuição nula (ou desprezável), e a circulação nos dois lados de γ perpendiculares ao eixo do solenóide têm $d\vec{\ell} = d\rho \vec{e}_\rho$, pelo que aí $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ sempre. Temos então que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{B}_z(\rho) \ell = \mu_o n_1 \ell I$$

donde $\mathcal{B}_z(\rho) = \mu_o n_1 I$ não depende de facto de ρ . O campo dentro do solenóide é assim homogéneo e paralelo ao seu eixo. Usando um argumento semelhante para o lado de fora do solenóide, pode-se ver que a circulação de \vec{B} num circuito retangular γ todo do lado de fora do solenóide deve ser nula na ausência de correntes que o atravessem, pelo que a componente $\mathcal{B}_z(\rho) = 0$ no exterior. Curiosamente, não podemos excluir a existência de uma componente

$$\mathcal{B}_\phi(\rho) = \frac{\mu_o I}{2\pi\rho}$$

do lado exterior, porque qualquer plano horizontal intersecta uma só espira do solenóide donde a circulação de \vec{B} no exterior à volta deste não se pode anular, exceto quando ρ for suficientemente grande para englobar o fio de retorno da corrente.

Campo no eixo de um solenóide de raio a , comprimento finito L com corrente I .

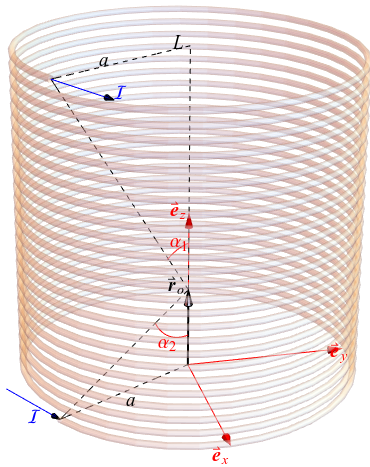


Figura 7.13:

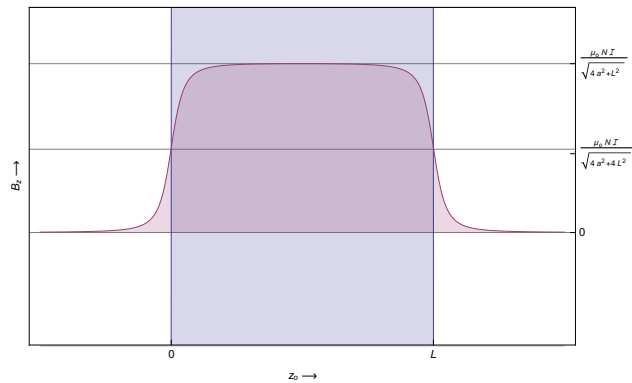


Figura 7.14:

- Usando o resultado anterior para o campo num ponto $\vec{r}_o = z_o \vec{e}_z$ do eixo de um anel com corrente I e raio a , num plano à cota z , e considerando $n = \frac{N}{L}$ anéis por unidade de comprimento

$$d\vec{B}(z_o, z) = \frac{\mu_o I}{2} \frac{n a^2 dz}{(a^2 + (z - z_o)^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(z_o) = \int d\vec{B}(z_o, z) = \frac{\mu_o I}{2} \left[\frac{n(z - z_o)}{\sqrt{a^2 + (z - z_o)^2}} \right]_{s_o}^{s_1} \vec{e}_z = \frac{\mu_o n I}{2} (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)) \vec{e}_z$$

- Usando a Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} = \int_0^L \frac{\mu_o I N}{2L} \frac{a^2}{((z_o - z)^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z dz$$

onde usamos, num referencial cilíndrico com eixo \vec{e}_z coincidente com o eixo do solenóide e origem na base do mesmo, o vetor $\vec{\ell}$ para representar um ponto no solenóide:

$$\begin{cases} \vec{\ell} = a \vec{e}_r(\varphi) + z \vec{e}_z \\ \vec{r} = z_o \vec{e}_z \end{cases} \implies \begin{cases} d\vec{\ell} = a d\varphi \vec{e}_\varphi(\varphi) \\ \vec{r} - \vec{\ell} = -a \vec{e}_r(\varphi) + (z_o - z) \vec{e}_z \\ d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{\ell}) = a^2 d\varphi \vec{e}_z + a(z_o - z) d\varphi \vec{e}_r(\varphi) \end{cases}$$

A primitiva de $\frac{1}{(a^2+s^2)^{3/2}}$ em ordem a s é $\frac{s}{a^2\sqrt{a^2+s^2}}$ e o integral pode ser realizado mudando de variável $z \rightarrow s = (z_o - z)$ com $ds = -dz$, sendo o domínio de integração agora $s \in [z_o, L - z_o]$.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o NI}{2L} \left(\frac{L - z_o}{\sqrt{a^2 + (L - z_o)^2}} + \frac{z_o}{\sqrt{a^2 + z_o^2}} \right) \vec{e}_z = \frac{\mu_o n I}{2} (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2))$$

7.7 O Efeito de Hall

Considere-se um condutor de largura L e espessura h , orientado de forma que a sua secção reta seja $\Delta\vec{S} = L h \vec{e}_x = (L \vec{e}_y) \times (h \vec{e}_z)$. Então, se estabelecermos um campo magnético $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ na região, qualquer corrente I no condutor irá ser afetada pelo campo magnético dando origem ao campo de Hall: se $I = Nq \vec{v} \cdot \Delta\vec{S}$, com N a densidade de eletrões de condução e $-\vec{v} = -v_d \vec{e}_x$ a sua velocidade média, podemos determinar este campo no estado de equilíbrio quando $\vec{F} = q (\vec{E}_{Hall} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0$. Isto acontece quando $\vec{E}_{Hall} = -\vec{v} \times \vec{B} = v_d B_z \vec{e}_y \equiv \frac{I}{NqLh} B_z \vec{e}_y$. A diferença de potencial V entre as duas faces opostas do condutor na direção \vec{e}_y será determinada da relação $\vec{E}_{Hall} = \frac{V}{L} \vec{e}_y$, i.e. $V = \frac{IB_z}{Nqh}$.

Para Semicondutores:

$$\begin{cases} N = 10^{22} \text{ eletrões/m}^3 \\ q = 1.602 \times 10^{-19} C \\ h = 0.1 \text{ mm} \\ I = 5 \text{ mA} \\ \frac{V}{B_z} = \frac{I}{Nqh} \approx 30 \frac{mV}{T} \end{cases}$$

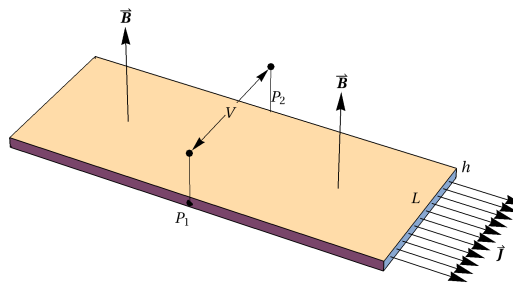
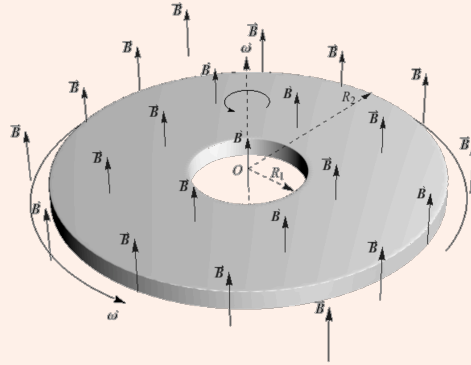


Figura 7.15: Efeito de Hall.

Exercício 7.2

Uma anilha condutora, de raios $R_1 = 5 \text{ cm}$ e $R_2 = 13 \text{ cm}$, está imersa num campo magnético $\vec{B} = 57 \vec{e}_z \text{ mT}$ homogéneo, perpendicular à sua superfície. Quando a anilha é posta a rodar em torno do seu eixo vertical com velocidade angular $\vec{\omega} = 76 \times 10^3 \vec{e}_z \text{ r.p.m.}$ qual é a diferença de potencial V que se estabelece ao fim de algum tempo entre as superfícies interior e exterior da anilha?



Resposta 7.1

$$\vec{E}_e = -\vec{E}_i = -(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - (\vec{B} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} = -\omega B r \vec{e}_r$$

$$V = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_e \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} \omega B (R_2^2 - R_1^2) = -3.2 \text{ V}$$

7.8 Força Magnética em condutores e correntes:

Na presença de campos magnéticos, as correntes em condutores originam forças sobre estes devido à componente magnética da força de Lorentz. Considerando a força sobre um segmento $d\vec{S}$ do condutor de secção $\Delta\vec{S}$ atravessada por uma corrente I , sabemos que a carga de condução aí contida $dQ = Nq\Delta\vec{S} \cdot d\vec{\ell}$ vai transmitir ao condutor uma força $d\vec{F}_m = dQ \vec{v} \times \vec{B}$, onde $\vec{v} \parallel d\vec{\ell}$ representa a velocidade média de deslocamento das cargas de corrente. Assim

$$d\vec{F}_m = (Nq\Delta\vec{S} \cdot d\vec{\ell}) \vec{v} \times \vec{B} = (Nq\Delta\vec{S} \cdot \vec{v}) d\vec{\ell} \times \vec{B} = I d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad \therefore \quad \vec{F}_m = I \oint d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Força entre dois condutores retilíneos paralelos

Quando dois condutores retilíneos paralelos transportam correntes I_1 e I_2 a uma distância d um do outro, cada um sente uma força devida ao campo magnético gerado pela corrente do outro. Assim, se $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi d} \vec{e}_y$ designa o campo que o 1º condutor cria à distância d na posição do 2º condutor, a força aí exercida num comprimento L de condutor será (usando \vec{e}_z na direção comum aos condutores)

$$\vec{F}_{12} = \int I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 = -I_2 \int_0^L B_{1\theta}(d) \vec{e}_y \times \vec{e}_z dz = -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{L}{d} \vec{e}_x$$

onde fizemos $d\vec{\ell}_2 = dz \vec{e}_z$. A força é atrativa se $I_1 I_2 > 0$ e repulsiva se $I_1 I_2 < 0$.

É fácil de verificar que, neste caso particular (nem sempre é assim), $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, porque o campo gerado pela corrente I_2 na posição do 1º condutor é $\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi d} \vec{e}_y$ e $d\vec{\ell}_1 = dz \vec{e}_z$.

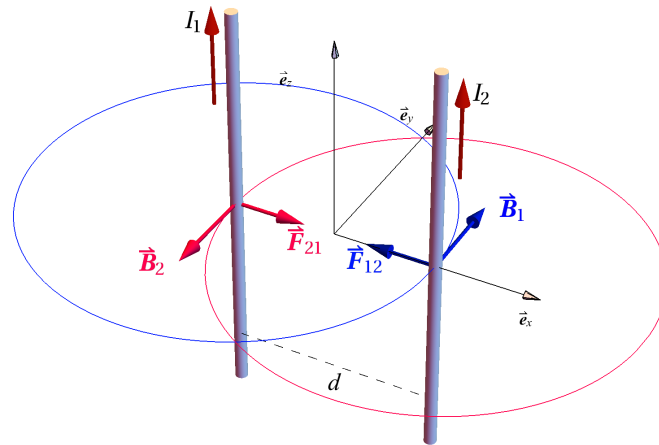


Figura 7.16: Força entre correntes filiformes I_1 e I_2 paralelas separadas por uma distância d .

7.8.1 Força sobre um circuito fechado Γ

Considere um condutor filiforme que forma uma curva fechada $\Gamma(\vartheta) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, percorrido por uma corrente I . Se este circuito estiver exposto a um campo magnético exterior \vec{B} , cada segmento $d\vec{r}(\vartheta)$ do condutor vai sentir o efeito de uma força $d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}$. A força total sobre o circuito (que, se este for rígido, se traduzirá numa aceleração do seu centro de massa) é

$$\vec{F} = \oint_{\Gamma} I d\vec{r} \times \vec{B} \equiv I \int_0^{2\pi} \frac{d\vec{r}(\vartheta)}{d\vartheta} \times \vec{B}(\mathbf{r}(\vartheta)) d\vartheta$$

Se escrevermos o produto externo na forma $d\vec{r} \times \vec{B} = (\vec{a} \cdot d\vec{r}) \vec{e}_x + (\vec{b} \cdot d\vec{r}) \vec{e}_y + (\vec{c} \cdot d\vec{r}) \vec{e}_z$ onde

$$\vec{a} = B_z \vec{e}_y - B_y \vec{e}_z = \vec{B} \times \vec{e}_x$$

$$\vec{b} = B_x \vec{e}_z - B_z \vec{e}_x = \vec{B} \times \vec{e}_y$$

$$\vec{c} = B_y \vec{e}_x - B_x \vec{e}_y = \vec{B} \times \vec{e}_z$$

poderemos aplicar o teorema de Stokes a cada componente, donde

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I \left(\oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} \right) \vec{e}_x + I \left(\oint_{\Gamma} \vec{b} \cdot d\vec{r} \right) \vec{e}_y + I \left(\oint_{\Gamma} \vec{c} \cdot d\vec{r} \right) \vec{e}_z = \\ &= I \left(\iint_S \nabla \times \vec{a} \cdot d\vec{S} \right) \vec{e}_x + I \left(\iint_S \nabla \times \vec{b} \cdot d\vec{S} \right) \vec{e}_y + I \left(\iint_S \nabla \times \vec{c} \cdot d\vec{S} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Pode-se calcular os rotacionais indicados, e dado que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, obtém-se

$$\nabla \times \vec{a} = (\vec{e}_x \cdot \nabla) \vec{B} - (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{e}_x = \partial_x \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{b} = (\vec{e}_y \cdot \nabla) \vec{B} - (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{e}_y = \partial_y \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{c} = (\vec{e}_z \cdot \nabla) \vec{B} - (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{e}_z = \partial_z \vec{B}$$

Vemos portanto que a força total que atua no circuito é, em cada direção, proporcional ao fluxo através de S , da variação de \vec{B} nessa direção

$$\vec{F} = I \left(\iint_S \partial_x \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \vec{e}_x + I \left(\iint_S \partial_y \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \vec{e}_y + I \left(\iint_S \partial_z \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \vec{e}_z$$

No caso particular de um circuito PLANO, \vec{n} é constante e $\partial_{x_i} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \partial_{x_i} (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS$, donde

$$\vec{F} = I \iint_S \nabla (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S d\vec{F}$$

onde $d\vec{F} = I \nabla (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS$.

7.8.2 Força Nula Sobre Corrente em campo homogéneo

Quando \vec{B} é constante, $\vec{F}_m = I \left(\oint d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = 0$ necessariamente para um circuito fechado. Isto significa que para um circuito não-rígido o centro de massa do circuito não é acelerado, embora possa haver deformações no circuito. Para um circuito rígido não há nem deformações nem aceleração global.

Exercício 7.3 — Duas correntes retilíneas filiformes.

Consideremos agora dois condutores retilíneos paralelos, separados por uma distância d e percorridos por correntes I_1 e I_2 . Calculamos a força que o campo gerado por I_1 exerce num segmento de comprimento L do condutor 2

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I_1}{r} \vec{e}_\phi(\phi); \quad d\vec{S} = dr dz \vec{e}_\phi(\phi); \quad \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial r} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_o I_1}{2\pi} \left(-\frac{1}{r^2} \right) dr dz; \quad \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial z} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{F}_m(L) = I_2 \int_d^\infty \left(-\frac{1}{r^2} \right) dr \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_o I_1}{2\pi} dz \vec{e}_r = -\frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I_1 I_2 L}{d} \vec{e}_r = -2 \times 10^{-7} \frac{I_1 I_2 L}{d} \vec{e}_r$$

Esta última expressão tem significado histórico já que serve de base à definição de Ampère (A) como unidade de corrente, e simultaneamente a especificação do valor da permeabilidade magnética do vácuo μ_o . De facto uma corrente de $I_1 = -I_2 = 1A$ é a corrente que atravessa dois condutores finos separados de $d = 1m$ e que causa por unidade de comprimento uma força de magnitude $\frac{|\vec{F}_m|}{L} = 2 \times 10^{-7} N$. Consequentemente, $\frac{\mu_o}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ ou seja, no sistema SI,

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

■ Exemplo 7.3 — Altifalante, auscultador, microfone.

Num altifalante, uma bobina com N espiras ligada a um cone de material flexível é percorrida por uma corrente variável $I(t)$. A bobina está rodeada por uma campo magnético com uma componente radial não nula na zona da bobina, pelo que a força resultante é vertical e diretamente proporcional à corrente, o que resulta na deformação do cone e a transmissão/conversão de vibrações acústicas.

O microfone e o auscultador funcionam de forma semelhante mas com condensadores de

geometria variável, o que se traduz numa relação entre a separação entre as armaduras dum condensador e a tensão entre as mesmas, embora em ambos estes casos outros designs mais compactos se substituam atualmente a este mecanismo.

Usando coordenadas cilíndricas com eixo coincidente com o de uma bobine cilíndrica de raio a que se pode deslocar num campo magnético fixo com uma componente radial $B_r \neq 0$,

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\phi \vec{e}_\phi + B_z \vec{e}_z$$

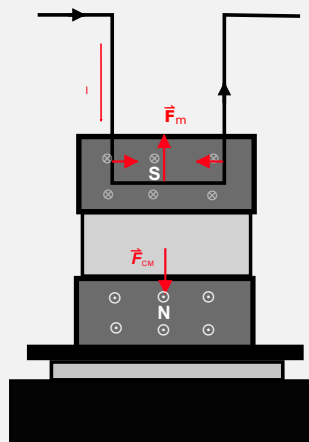
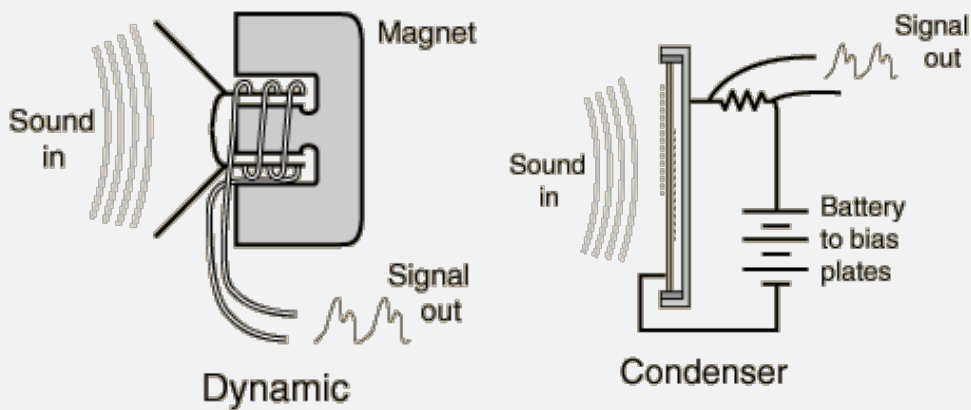
a parametrização das espiras da bobina escreve-se:

$$\vec{\ell} = a \vec{e}_\phi(\phi) \quad ; \quad d\vec{\ell} = a d\phi \vec{e}_\phi(\phi)$$

Se a corrente que atravessa a bobine é $I(t)$, a força transmitida ao cone flexível é

$$\vec{F}_m = NI(t) \oint (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = NI(t) \int_0^{2\pi} a (B_r \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r + B_z \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z) d\phi = -2\pi a B_r NI(t) \vec{e}_z$$

o que se traduz numa vibração que é transmitida como som.



■ Exemplo 7.4 — Medição do campo magnético de um íman permanente com uma ba-

lança. ■

7.9 Momento Magnético e Binários de Força em condutores e correntes

No que se segue, S é uma superfície aberta e $\Gamma = \partial S$ o seu bordo, i.e. a curva que a delimita. O elemento de linha $d\vec{r}$ é tangente a Γ e a normal \vec{n} à superfície S é definida pela regra da mão direita em relação ao sentido da circulação ao longo de Γ (i.e. um observador sobre a superfície, em pé e paralelo a \vec{n} , veria a circulação processar-se da direita para a esquerda).

Mais geralmente pode-se também escrever²

$$\vec{F}_m = I \oint d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \iint_S \nabla \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Se as derivadas $\frac{\partial \vec{B}}{\partial x^i}$ forem constantes $\vec{F}_m = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot \nabla \vec{m}$ onde $\vec{m} = I \iint_S d\vec{S}$ designa o Momento Dipolar Magnético.

7.9.1 Binário sobre um circuito fechado Γ

Para além da força resultante sobre um circuito fechado Γ percorrido por uma corrente I quando num campo magnético exterior \vec{B} , vai-se observar um momento de força (binário) que, no caso de se tratar de um circuito rígido, terá como efeito uma rotação de todo o circuito em torno do seu centro de massa além duma rotação deste relativamente à origem. Vamos calcular esse binário somando as contribuições elementares dos momentos de forças a que um segmento $d\vec{r}(\vartheta)$ do condutor fica sujeito:

$$d\vec{N}_m = \vec{r} \times d\vec{F}_m = I \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B})$$

$$\vec{N} = \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (I d\vec{r} \times \vec{B}) \equiv I \int_0^{2\pi} \vec{r}(\vartheta) \times \left(\frac{d\vec{r}(\vartheta)}{d\vartheta} \times \vec{B}(\vec{r}(\vartheta)) \right) d\vartheta \quad (7.3)$$

Por uma identidade comum de cálculo vetorial

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

poderemos escrever (7.3) como

$$\vec{N} = I \oint_{\Gamma} (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - I \oint_{\Gamma} (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B} \quad (7.4)$$

² Note que:

$$\oint_{\partial S} d\vec{\ell} \times \vec{B} = \iint_S \nabla \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Dado um vetor arbitrário fixo \vec{a} podemos verificar que

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \oint (d\vec{\ell} \times \vec{B}) &= \oint (\vec{B} \times \vec{a}) \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \nabla \times (\vec{B} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \\ &= \iint_S ((\nabla \cdot \vec{a}) \vec{B} - (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \iint_S ((\vec{a} \cdot \nabla) \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \\ &= \vec{a} \cdot \left(\vec{e}_j \iint_S (\partial_{x_j} B^k) n_k dS \right) = \vec{a} \cdot \iint_S (\nabla \vec{B}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

O primeiro integral é redutível pelo seguinte corolário do teorema de Stokes ³:

$$\oint_{\Gamma} \psi \, d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \times \nabla \psi$$

que, no caso $\psi = \vec{r} \cdot \vec{B}$, resulta em

$$\oint_{\Gamma} (\vec{r} \cdot \vec{B}) \, d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \times \nabla(\vec{r} \cdot \vec{B})$$

Uma outra identidade vetorial

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a})$$

permite-nos deduzir, dado que $\nabla \times \vec{r} \equiv 0$ e $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = 0$ fora do condutor,

$$\iint_S d\vec{S} \times \nabla(\vec{r} \cdot \vec{B}) = \iint_S d\vec{S} \times \left((\vec{r} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{r} \right) = \iint_S d\vec{S} \times \left((\vec{r} \cdot \nabla) \vec{B} \right) + \iint_S d\vec{S} \times \vec{B}$$

O segundo integral de (7.4) pode beneficiar do teorema de Stokes e da identidade vetorial

$$\nabla \times (\psi \vec{a}) = \nabla \psi \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a} \quad (7.5)$$

Temos então para cada componente $\vec{B} = B^i \vec{e}_i$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B} = \left(\iint_S \nabla \times (B^i \vec{r}) \cdot d\vec{S} \right) \vec{e}_i = \left(\iint_S (\nabla B^i \times \vec{r}) \cdot d\vec{S} \right) \vec{e}_i$$

No caso de campos homogêneos $\vec{B} = C^{te}$, podemos de imediato dizer que o binário (7.3) é

$$\vec{N} = I \iint_S d\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

onde se definiu o Momento Magnético⁴

$$\vec{m} = I \iint_S d\vec{S} = I \vec{S}$$

Numa situação geral, usando a notação $d\vec{m} = I d\vec{S}$, teremos

$$\vec{N} = \iint_S \left(d\vec{m} \times \vec{B} + d\vec{m} \times \left((\vec{r} \cdot \nabla) \vec{B} \right) + \left(d\vec{m} \cdot (\vec{r} \times \nabla) \right) \vec{B} \right) = \iint_S \left(d\vec{m} \times \vec{B} + \vec{r} \times \left((d\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \right) \right) \quad (7.6)$$

³ A aplicação do Teorema de Stokes $\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$ a um campo de vetores da forma $\vec{A}(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \vec{a}$ onde \vec{a} é um vetor constante dá, usando a identidade vetorial (7.5) e as propriedades do produto misto $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

$$\left(\oint_{\Gamma} \psi \, d\vec{r} \right) \cdot \vec{a} = \oint_{\Gamma} (\psi \vec{a}) \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times (\psi \vec{a})) \cdot d\vec{S} = \iint_S (\nabla \psi \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \left(\iint_S d\vec{S} \times \nabla \psi \right) \cdot \vec{a}$$

e visto que a identidade funciona para \vec{a} arbitrário, tem-se:

$$\oint_{\Gamma} \psi \, d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \times \nabla \psi$$

⁴ Para uma distribuição contínua de corrente, deve-se escrever

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r} \times \vec{J} \, dV$$

onde utilizámos no cálculo para o último termo, as identidades resultantes das equações de campo

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \partial_{x_i} B^j = \partial_{x_j} B^i \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \partial_{x_1} B^1 = -\partial_{x_2} B^2 - \partial_{x_3} B^3\end{aligned}$$

Para um circuito PLANO tem-se $d\vec{S} = \vec{n} dS$ onde \vec{n} é constante, i.e. $\partial_{x_i} \vec{n} = 0$. Então (7.6) escreve-se

$$\vec{N} = \iint_S \left(d\vec{m} \times \vec{B} + \vec{r} \times \nabla(\vec{B} \cdot d\vec{m}) \right) = \iint_S d\vec{m} \times \vec{B} + \iint_S \vec{r} \times d\vec{F}$$

Vemos que o último termo representa o momento em relação à origem duma força elementar

$$d\vec{F} = I \nabla(\vec{B} \cdot \vec{n}) dS$$

em cada ponto de S .

Teorema 7.9.1 — Binário sobre espira de corrente num campo homogéneo.

O binário exercido sobre uma espira de área \vec{A} percorrida por uma corrente I num campo magnético homogéneo \vec{B} é

$$\vec{N}_m = I \vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

onde fizemos:

$$\begin{cases} \vec{A} = \frac{1}{2} \oint \vec{\ell} \times d\vec{\ell} & \text{Área orientada do circuito} \\ \vec{m} = I \vec{A} & \text{Momento Magnético} \end{cases}$$

Demonstração 7.9.2

Quando \vec{B} é constante, usando a identidade algébrica:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

podemos calcular

$$d(\vec{\ell} \times (\vec{\ell} \times \vec{B})) = d\vec{\ell} \times (\vec{\ell} \times \vec{B}) + \vec{\ell} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

$$-\vec{B} \times (\vec{\ell} \times d\vec{\ell}) = -d\vec{\ell} \times (\vec{\ell} \times \vec{B}) + \vec{\ell} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

$$d(\vec{\ell} \times (\vec{\ell} \times \vec{B})) - \vec{B} \times (\vec{\ell} \times d\vec{\ell}) = 2\vec{\ell} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

Substituindo na expressão anterior e tendo em conta que o integral de um diferencial exato num circuito fechado é nulo, obtemos

$$\vec{N}_m = I \oint \vec{\ell} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} I \left[\oint d[\vec{\ell} \times (\vec{\ell} \times \vec{B})] - \vec{B} \times \oint (\vec{\ell} \times d\vec{\ell}) \right] = I \left[\frac{1}{2} \oint (\vec{\ell} \times d\vec{\ell}) \right] \times \vec{B}$$

Se designarmos o baricentro do circuito por \vec{R}_c então podemos escrever $\vec{\ell} = \vec{\ell}' + \vec{R}_c$ e $d\vec{\ell} = d\vec{\ell}'$ donde $\oint \vec{\ell} \times d\vec{\ell} = \oint \vec{\ell}' \times d\vec{\ell}'$ e o resultado mantém-se.



8. Indução Magnética e Campos na Matéria

Conteúdo

8.1	Lei de Faraday e Lei de Lenz	212
8.1.1	Lei de Faraday Infinitesimal (circuito infinitesimal fixo)	212
8.1.2	Forma potencial dos campos variáveis	212
8.1.3	Lei de Faraday: Campo \vec{B} constante no tempo	212
8.1.4	Apêndice Matemático:	213
8.1.5	Lei de Faraday: Campo \vec{B} variável no tempo	213
8.1.6	Indução Magnética	214
8.1.7	Exemplos:	215
8.2	Lei de Ampère Geral : $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	218
8.2.1	Corrente de Deslocamento $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	218
8.3	Energia no campo magnético	219
8.3.1	Energia Magnética para estabelecer uma corrente individual	219
8.3.2	Energia magnética de translação de correntes	220
8.3.3	Energia Magnética Total:	221
8.3.4	Densidade de Energia Magnética w_m no campo de um solenóide	222
8.3.5	Densidade de energia magnética no caso geral.	222
8.3.6	Pressão Magnética na interface entre dois meios	225
8.4	Potencial Vetor na Gauge de Lorentz $\nabla \cdot \vec{A} = 0$	227

8.5	Campo magnético \vec{H} na matéria :	228
8.5.1	Magnetização \vec{M} e Correntes de Magnetização	228
8.5.2	Campo de uma distribuição contínua de momentos dipolares magnéticos	228
8.5.3	Densidades de corrente de Magnetização	229
8.5.4	Potencial escalar magnético para um campo de dipolos magnéticos. . . .	229
8.5.5	Campo de uma barra uniformemente magnetizada	230
8.5.6	Condições fronteira para os campos \vec{B} e \vec{H}	231
8.5.7	Lei de Ampère na matéria	232
8.5.8	Efeito dum campo magnético em correntes de Ampère: Modelo de Langevin	234
8.5.9	Susceptibilidade Magnética χ_m e Permeabilidade Magnética $\mu = \mu_o(1 + \chi_m)$	235
8.5.10	Diamagnéticas ($\chi_m < 0$) (repelidas por um campo magnético forte): $\vec{m} \equiv 0; \langle \vec{M} \rangle = 0$	235
8.5.11	Paramagnéticas ($\chi_m > 0$) (atraídas por um campo magnético forte): $\vec{m} \neq 0; \langle \vec{M} \rangle = 0$	235
8.5.12	Ferromagnéticas ($\chi_m \gg 1$): $\vec{m} \neq 0; \langle \vec{M} \rangle \neq 0$	236

8.1 Lei de Faraday e Lei de Lenz

Designando por Φ o fluxo magnético total através de um circuito, a força eletromotriz de indução magnética

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{com} \quad \Phi(t) = \iint_S \vec{B}(\vec{\xi}, t) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}) \quad (Wb = \text{Weber} \equiv Vs)$$

8.1.1 Lei de Faraday Infinitesimal (circuito infinitesimal fixo)

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}(\vec{\ell}) \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \times \vec{E})(\vec{\xi}) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{\xi}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}(\vec{\xi})$$

$$\therefore \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

8.1.2 Forma potencial dos campos variáveis

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \therefore \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

8.1.3 Lei de Faraday: Campo \vec{B} constante no tempo

Força Eletromotriz de indução magnética (\mathcal{E}_i) quando $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$$\begin{cases} d(\vec{r} \times \vec{v}) = d\vec{r} \times \vec{v} + \vec{r} \times d\vec{v} \\ \frac{d}{dt}(\vec{r} \times d\vec{r}) = \vec{v} \times d\vec{r} + \vec{r} \times d\vec{v} = 2\vec{v} \times d\vec{r} - d(\vec{r} \times \vec{v}) \end{cases} \quad \therefore \quad \vec{v} \times d\vec{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt}(\vec{r} \times d\vec{r}) + d(\vec{r} \times \vec{v}) \right)$$

$$\vec{F}_{im} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \oint_{\gamma} \frac{\vec{F}_{im}}{q} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - \oint_{\gamma} (\vec{v} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B} = - \oint_{\gamma} \left(\frac{d\vec{\ell}}{dt} \times d\vec{\ell} \right) \cdot \vec{B} = \\ &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \oint_{\gamma} (\vec{\ell} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B} = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \oint_{\gamma} (\vec{B} \times \vec{\ell}) \cdot d\vec{\ell} = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma}} \nabla \times (\vec{B} \times \vec{\ell}) \cdot d\vec{S} = \\ &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma}} ((\nabla \cdot \vec{\ell}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{\ell}) \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi_1}{dt} \end{aligned}$$

8.1.4 Apêndice Matemático:

8.1.4.1 Fluxo através de Superfície Móvel

Em geral:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_S \vec{a}(\vec{\xi}, t) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}, t) &= \iint_S \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{a}) \frac{d\vec{\xi}}{dt} + \nabla \times \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{\xi}}{dt} \right) \right) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}, t) \\ \therefore \frac{d\Phi_{\vec{a}}}{dt} &= \iint_S \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{a}) \frac{d\vec{\xi}}{dt} \right) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}, t) + \oint_{\partial S} \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{\ell}}{dt} \right) \cdot d\vec{\ell}(t) \end{aligned}$$

8.1.5 Lei de Faraday: Campo \vec{B} variável no tempo

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} \equiv - \iint_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{\xi}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_{\partial S} \left(\vec{B}(\vec{\ell}, t) \times \frac{d\vec{\ell}}{dt} \right) \cdot d\vec{\ell}$$

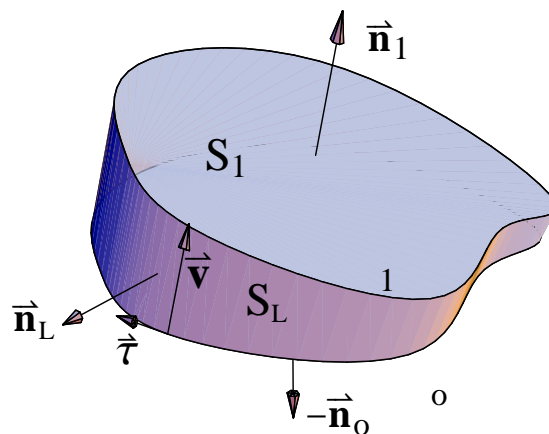


Figura 8.1: Teorema do fluxo-divergência é usado para calcular a variação do fluxo de \vec{B} através de um circuito móvel Γ .

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{S_t} \vec{B}(\vec{\xi}, t) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \left(\frac{\iint_{S_1} \vec{B}(\vec{\xi}_1, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_1) - \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{\xi}_0, t_0) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_0)}{t_1 - t_0} \right)$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{B} \, dV \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$\iint_{S_1} \vec{B}(\vec{\xi}_1, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_1) = \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{\xi}_0, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_0) - \iint_{S_L} \vec{B}(\vec{\xi}_L, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_L) \quad \therefore$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \left(\frac{\iint_{S_0} \vec{B}(\vec{\xi}_0, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_0) - \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{\xi}_0, t_0) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_0)}{t_1 - t_0} \right) - \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \left(\frac{\iint_{S_L} \vec{B}(\vec{\xi}_L, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_L)}{t_1 - t_0} \right)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \left(\frac{\iint_{S_0} \vec{B}(\vec{\xi}_0, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_0) - \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{\xi}_0, t_0) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_0)}{t_1 - t_0} \right) \rightarrow \iint_{S_0} \frac{\partial \vec{B}(\vec{\xi}_0, t_0)}{\partial t} \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_0)$$

$$\begin{aligned} - \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \left(\frac{\iint_{S_L} \vec{B}(\vec{\xi}_L, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_L)}{t_1 - t_0} \right) &\rightarrow \oint_{\Gamma_0 = \partial S_0} \left(\vec{B}(\vec{\ell}_0, t_0) \times \frac{d\vec{\ell}_0}{dt} \right) \cdot d\vec{\ell}_0 = \\ &= \iint_{S_0} \nabla \times \left(\vec{B}(\vec{\xi}_0, t_0) \times \frac{d\vec{\xi}_0}{dt} \right) \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}_0) \end{aligned}$$

porque $d\vec{S}(\vec{\xi}_L) \approx (t_1 - t_0) \vec{v} \times \vec{\tau} \, d\ell_0$ e ainda $\vec{B}(\vec{\ell}_0, t_0) \cdot \left(\frac{d\vec{\ell}_0}{dt} \times d\vec{\ell}_0 \right) \equiv \left(\vec{B}(\vec{\ell}_0, t_0) \times \frac{d\vec{\ell}_0}{dt} \right) \cdot d\vec{\ell}_0$

8.1.5.1 Exemplos de Aplicação : Correntes de Foucault

- Auscultador e Microfone
- Segurança de Eletromagnetes
- Levitação de Anel de Alumínio em cima dum solenoide com AC
- Motores: Disco metálico com ferro-magnete AC parcialmente blindado
- Campo magnético rotativo: núcleo toroidal com solenóides diametralmente opostos emparelhados com correntes AC circulando em sentidos opostos e passando de solenóide em solenóide.
- Travão magnético.
- Gerador trifásico.
- Medição de velocidade de correntes marítimas.

8.1.6 Indução Magnética

8.1.6.1 Coeficientes de Indução Magnética:

$$\Phi_\gamma = \mathcal{L}_\gamma I_\gamma + \sum_{\beta \neq \gamma} \mathcal{M}_{\gamma\beta} I_\beta$$

$$\Phi_\gamma = \iint_{S_\gamma} \vec{B}(\vec{\xi}) \cdot d\vec{S}_\gamma(\vec{\xi}) = \iint_{S_\gamma} \vec{B}_\gamma(\vec{\xi}) \cdot d\vec{S}_\gamma(\vec{\xi}) + \sum_{\beta \neq \gamma} \oint_\gamma \vec{A}_\beta(\vec{l}_\gamma) \cdot d\vec{l}_\gamma$$

$$\vec{A}_\beta(\vec{l}_\gamma) = \frac{\mu_0 I_\beta}{4\pi} \oint_\beta \frac{d\vec{l}_\beta}{|\vec{l}_\gamma - \vec{l}_\beta|} ; \quad \vec{B}_\gamma(\vec{\xi}) = \frac{\mu_0 I_\gamma}{4\pi} \oint_\gamma \frac{d\vec{l}_\gamma \times (\vec{\xi} - \vec{l}_\gamma)}{|\vec{\xi} - \vec{l}_\gamma|^3}$$

$$\Phi_\gamma = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \oint_\gamma \frac{d\vec{l}_\gamma \times (\vec{\xi} - \vec{l}_\gamma)}{|\vec{\xi} - \vec{l}_\gamma|^3} \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}) \right) I_\gamma + \sum_{\beta \neq \gamma} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\gamma \oint_\beta \frac{d\vec{l}_\beta \cdot d\vec{l}_\gamma}{|\vec{l}_\gamma - \vec{l}_\beta|} \right) I_\beta$$

8.1.6.2 Coeficiente de Auto-Indução

$$\mathcal{L}_\gamma \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \oint_\gamma \frac{d\vec{l}_\gamma \times (\vec{\xi} - \vec{l}_\gamma)}{|\vec{\xi} - \vec{l}_\gamma|^3} \cdot d\vec{S}(\vec{\xi}) \quad (\text{Henry})$$

8.1.6.3 Coeficientes de Indução Mútua

$$\mathcal{M}_{\gamma\beta} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\gamma \oint_\beta \frac{d\vec{l}_\beta \cdot d\vec{l}_\gamma}{|\vec{l}_\gamma - \vec{l}_\beta|} \quad (\text{Henry})$$

8.1.7 Exemplos:

8.1.7.1 Solenóide com N espiras e seção S , núcleo de permeabilidade magnética μ :

Para uma corrente I , tem-se

$$\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = N \left(\frac{\mu N}{L} I \right) S = \frac{\mu N^2 S}{L} I$$

$$\mathcal{L} = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu N^2 S}{L} \quad (\text{Henry})$$

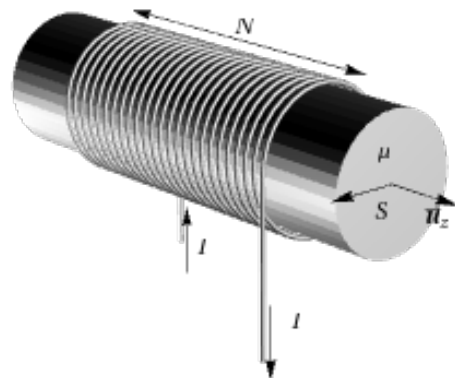


Figura 8.2:

8.1.7.2 Toróide com N espiras e raios R e r , núcleo de permeabilidade magnética μ :

Para uma corrente I , tem-se no interior $B = \frac{\mu N I}{2\pi R}$, sendo

$$S = \pi r^2 \quad \therefore \quad \mathcal{L} = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu N^2 r^2}{2R} \quad (\text{Henry})$$

8.1.7.3 Cabo coaxial, raio do condutor interno a , raio do condutor externo b :

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r} \implies \Phi = \int_0^L \int_a^b B(r) dr d\ell = \frac{\mu L I}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore \mathcal{L} = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu L}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{Henry})$$

8.1.7.4 Dois fios paralelos de raio a à distância d um do outro, com correntes opostas:

Pela Lei de Ampère

$$\begin{cases} B_1(r)2\pi r = \mu_o I \\ B_2(d-r)2\pi(d-r) = \mu_o I \end{cases} \implies B(r) = B_1(r) + B_2(d-r) = \frac{\mu_o I d}{2\pi r(d-r)}$$

$$\Phi = \int_0^L \int_a^{d-a} B(r) dr d\ell = \frac{\mu_o L I}{\pi} \log\left(\frac{d-a}{a}\right) \quad \therefore \mathcal{L} = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_o L}{\pi} \log\left(\frac{d-a}{a}\right) \quad (\text{Henry})$$

8.1.7.5 Aplicação às leis dos circuitos elétricos fixos

$$\mathcal{E}_m(\gamma) = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt} = -\mathcal{L}_\gamma \frac{dI_\gamma}{dt} - \sum_{\beta \neq \gamma} \mathcal{M}_{\gamma\beta} \frac{dI_\beta}{dt}$$

8.1.7.6 Circuito RLC

$$\mathcal{E}_{tot} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_i^f \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{\ell} + \int_f^i \vec{E}_{int} \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{E}_{em} + \mathcal{E}_{int}$$

Por definição $\mathcal{E}_{int} = \mathcal{E}_{tot} - \mathcal{E}_{em} = \phi_i - \phi_f = \int_f^i \nabla\phi \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{V}$ Em partes do circuito em que este apresenta uma condutibilidade $\sigma_e = \frac{1}{\rho_e}$, a Lei de Ohm $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma_e}$ pode ser aplicada. Dado que $I = \vec{J} \cdot \vec{S}$ e em geral $\vec{S} \parallel d\vec{\ell}$, tem-se:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{\ell} = I \int \frac{\rho_e}{S} d\ell = RI$$

Contudo no espaço entre placas de um condensador não existe condutibilidade, e nesse pedaço

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\Delta\phi = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int_{t_o}^t I(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{E}_{int} = \mathcal{V} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \mathcal{E}_i \quad \therefore \mathcal{V} = RI(t) + \frac{1}{C} \int_{t_o}^t I(\tau) d\tau + \mathcal{L} \frac{dI(t)}{dt}$$

Quando $\mathcal{V} = \text{Constante}$ derivando a expressão anterior em ordem ao tempo obtém-se uma equação de oscilador amortecido. A equação secular obtém-se substituindo a solução $I(t) = I_0 e^{kt}$

$$\mathcal{L} \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa^2 + \frac{R}{\mathcal{L}} \kappa + \frac{1}{\mathcal{L}C} = 0$$

$$\kappa_{\pm} = -\frac{R}{2\mathcal{L}} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2\mathcal{L}}\right)^2 - \frac{1}{\mathcal{L}C}}$$

Quando $\frac{R}{2\mathcal{L}} = \lambda < \omega = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}$, i.e. $R < 2\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}}$ a solução é oscilatória amortecida

$$I(t) = I_0 e^{-\lambda t} e^{\pm i \omega t} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}$$

8.1.7.7 Transformador com N_p espiras no primário e N_s espiras no secundário com núcleo de secção S

Fluxo no Primário:

$$\Phi_p = N_p \psi_p$$

$$\psi_p = \frac{\mu N_p I_p}{\ell} S + \psi_{sp}$$

$$\Phi_p = \mathcal{L}_p I_p + \mathcal{M}_{sp} I_s \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_p = \frac{\mu S}{\ell} N_p^2$$

Fluxo no Secundário:

$$\Phi_s = N_s \psi_s$$

Se tivermos $\psi_s = \psi_p$

$$\Phi_s = \mathcal{L}_s I_s + \mathcal{M}_{sp} I_p \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_{sp} = \frac{\mu S}{\ell} N_s N_p$$

Forças Electromotrizes:

$$\mathcal{E}_p = -N_p \frac{d\psi_p}{dt} \quad ; \quad \mathcal{E}_s = -N_s \frac{d\psi_p}{dt} \quad \therefore \quad \mathcal{E}_s = \frac{N_s}{N_p} \mathcal{E}_p$$

8.1.7.8 Força Magneto-motriz e campo de Toróide com fenda δl e N espiras

$$\mathcal{E}_{mm} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI$$

$$\left(\vec{B}_i - \vec{B}_e\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu H_i = B_i = B_e = \mu_o H_e \quad \Rightarrow \quad H_i = \frac{1}{\mu_r} H_e$$

$$H_i(l - \delta l) + H_e \delta l = NI \quad \Rightarrow \quad B_e \left(\frac{(l - \delta l)}{\mu} + \frac{\delta l}{\mu_o} \right) = NI$$

$$\therefore \quad B_e = \frac{\mu_o NI}{l} \frac{l}{\left(\frac{l - \delta l}{\mu_r} + \delta l\right)} = \frac{\mu_o NI}{l} \left(\frac{\mu_r}{1 + (\mu_r - 1) \frac{\delta l}{l}} \right) \gg \frac{\mu_o NI}{l} = B_e^o \text{ (sem entreferro)}$$

8.2 Lei de Ampère Geral : $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

8.2.1 Corrente de Deslocamento $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

- Em Eletrostática: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$
- Mas a Divergência é incorreta em geral:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0 \neq \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Da Lei de Gauss deve-se ter:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad \therefore \quad \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \equiv 0$$

A Corrente Total: $\vec{J}_{Tot} = \vec{J}_C + \vec{J}_D$ é que tem Divergência nula, onde $\vec{J}_C \equiv \vec{J}$ é a Corrente de Condução (Movimentos de Cargas) e $\vec{J}_D \equiv \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ a Corrente de Deslocamento (Movimentos de Campo)

Problema: Corrente de deslocamento em circuito R-C

Um condensador de placas paralelas e capacidade C está isolado e cheio com um material de constante dielétrica ϵ_r , condutibilidade σ . Inicialmente o condensador está carregado com carga Q_0 .

- Ramo Resistivo:

$$I_1 = \frac{V}{R} = \vec{J} \cdot \delta \vec{S}$$

- Ramo Condensador:

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = \frac{\epsilon A}{h} \frac{d}{dt} \left(\int_0^h \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right) = \frac{A}{h} \left(\int_0^h \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} \right) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{S} = \vec{J}_D \cdot \vec{S}$$

Sistema Equivalente a R-C em paralelo:

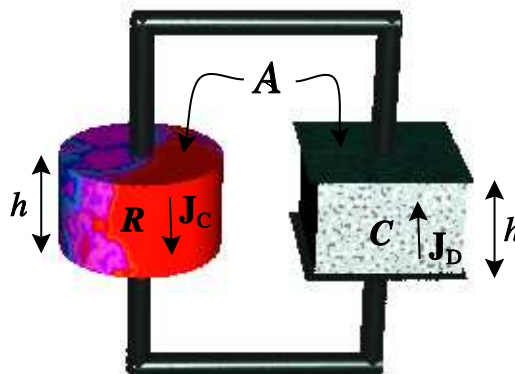


Figura 1

- Condensador plano de área A , separação h , com dielétrico ideal (ϵ):

$$C = \frac{\epsilon A}{h}$$

- Resistência com secção A , comprimento h , e condutividade σ_e :

$$R = \frac{h}{\sigma_e A}$$

- Carga Q no condensador implica uma queda de potencial $V = \frac{Q}{C}$ através do condensador.
- A mesma queda de potencial V através da resistência deve-se a uma corrente $I = \frac{V}{R}$.

Assim

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q/C}{R} \implies Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\tau = RC = \frac{\epsilon}{\sigma_e}$$

A constante de tempo τ desta descarga para um dielétrico de quartzo com constante dielétrica $\epsilon_r = 4.3$, resistividade $\frac{1}{\sigma_e} = 10^{13} \Omega m$

$$\tau = RC = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\sigma_e} = 4.3 \times 8.842 \times 10^{-12} \left(\frac{C}{Vm} \right) \times 10^{13} (\Omega m) = 380.2 (s)$$

Campo Eléctrico no Condensador:

$$|\vec{E}| = \frac{V}{h} = \frac{Q}{Ch} \quad \therefore \quad |\vec{E}| = \frac{Q_0}{\epsilon A} e^{-\frac{\sigma_e t}{\epsilon}}$$

Densidade de Corrente de Deslocamento:

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \therefore \quad \vec{J}_d \cdot \vec{S} = -\frac{\sigma_e}{\epsilon} Q_0 e^{-\frac{\sigma_e t}{\epsilon}}$$

Densidade de Corrente de Condução:

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E} \quad \therefore \quad \vec{J} \cdot \vec{S} = \frac{\sigma_e}{\epsilon} Q_0 e^{-\frac{\sigma_e t}{\epsilon}}$$

8.3 Energia no campo magnético

8.3.1 Energia Magnética para estabelecer uma corrente individual

Consideremos um circuito RLC com uma bateria proporcionando uma q.d.p. V e uma indutância criando uma força electromotriz de indução magnética $\mathcal{E}_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$. A equação do circuito é então

$$V + \mathcal{E}_{em} = IR + \frac{Q}{C}$$

A potência despendida pela bateria é

$$\mathcal{P}_b = IV = RI^2 + I\frac{Q}{C} - I\mathcal{E}_{em} = RI^2 + \frac{Q}{C}I + I\frac{d\Phi}{dt}$$

A energia fornecida ao circuito é dada pelo integral no tempo da potência:

$$\Delta U_b = \int_0^t \mathcal{P}_b dt = \int_0^t RI^2 dt + \int_0^t \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} dt + \int_0^t I \frac{d\Phi}{dt} dt = \int_0^t \mathcal{P}_d dt + \frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C} + \int_0^{\Phi_t} I d\Phi$$

- O termo RI^2 representa a perda ohmica da resistência.
- O termo $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ é a energia elétrica armazenada no condensador C
- O último termo representa a energia magnética armazenada na indutância L .

Como $\Phi = LI$, esta energia magnética pode ser escrita em termos da corrente

$$U_{mL} = \int_0^{\Phi_t} I d\Phi = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I\Phi$$

8.3.2 Energia magnética de translação de correntes

$$(U_m)_{tr} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} I_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_{\alpha\beta}$$

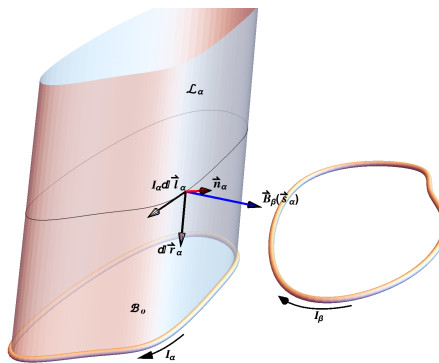


Figura 8.3:

Consideremos que os circuitos são transportados, um a um, do infinito para a sua posição final. O primeiro circuito desloca-se num espaço sem outros campos que o seu próprio, mas os seguintes têm que se deslocar no campo gerado pelas correntes que já se encontram em posição.

Cada circuito α pode ser descrito por uma parametrização conveniente $\gamma_\alpha : \theta \in [0, 2\pi] \rightarrow \vec{\ell}_\alpha(\theta)$ representando a posição final do circuito.

Designando por $\Gamma_\alpha : s \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \vec{r}_\alpha(s)$ uma curva do ∞ até à origem, então $\vec{s}_\alpha(s, \theta) = \vec{r}_\alpha(s) + \vec{\ell}_\alpha(\theta)$ representa um ponto de um tubo que o circuito α descreve quando é transladado desde o infinito até à sua posição final. Veremos adiante que a escolha do caminho Γ_α é irrelevante para o resultado final.

Note que o deslocamento dos circuitos é feito de forma infinitamente lenta, isto é não é necessária energia adicional para combater forças electromotrizes induzidas nos circuitos pela Lei de Faraday e manter as respetivas correntes constantes à medida que cada circuito é colocado em posição.

Teremos contudo que contabilizar separadamente a energia gasta a estabelecer a corrente I_α em cada circuito inicialmente.

Por outro lado, para cada par de circuitos é irrelevante se um é colocado na posição final primeiro que o outro, ou seja o trabalho $U_{\alpha\beta}$ necessário para colocar o circuito α em posição no campo de β quando β já está fixo é o mesmo que o trabalho $U_{\beta\alpha}$ de colocar β em posição no campo de α quando α já está fixo. Assim

$$(U_m)_{tr} = \sum_\alpha U_\alpha = \sum_\alpha \sum_{\beta < \alpha} U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} U_{\alpha\beta}$$

Designando por $\vec{F}_{\alpha\beta}(s)$ a força total sentida por α quando se encontra na posição parametrizada por s

$$U_{\alpha\beta} = \int_{\Gamma_\alpha} \vec{F}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_\alpha = \int_{\Gamma_\alpha} \left(\oint_{\gamma_\alpha} I_\alpha d\vec{\ell}_\alpha \times \vec{B}_\beta \right) \cdot d\vec{r}_\alpha = I_\alpha \int_{\Gamma_\alpha} \oint_{\gamma_\alpha} (d\vec{r}_\alpha \times d\vec{\ell}_\alpha) \cdot \vec{B}_\beta$$

Este último integral pode ser encarado como o fluxo de \vec{B}_β pela superfície lateral \mathcal{L}_α do tubo gerado pelo circuito α transladado ao longo de Γ_α . Se $d\vec{\ell}_\alpha$ representar um deslocamento no sentido directo relativamente a $d\vec{r}_\alpha$, então $d\vec{r}_\alpha \times d\vec{\ell}_\alpha = -d\vec{S}$ pelo que

$$U_{\alpha\beta} = -I_\alpha \iint_{\mathcal{L}_\alpha} \vec{B}_\beta \cdot d\vec{S} = I_\alpha \left(\int_{\mathcal{B}_o} \vec{B}_\beta \cdot d\vec{S} + \int_{\mathcal{B}_\infty} \vec{B}_\beta \cdot d\vec{S} \right)$$

Aqui \mathcal{B}_o e \mathcal{B}_∞ representam superfícies de contorno assente no circuito α quando este se encontra na posição final e inicial, e usamos o facto de não existirem cargas magnéticas ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$) para deduzir que o fluxo através da superfície lateral do tubo gerado por α deve ser igual e de sinal contrário ao fluxo através das bases que fecham o tubo. O facto de o fluxo de \vec{B} ser zero em qualquer superfície fechada é aliás também a razão porque não interessa qual o percurso Γ_α que usamos para calcular o trabalho realizado. Assumindo que o campo gerado por I_β no infinito se anula, $\vec{B}_\beta(\vec{s}_\alpha(\infty, \theta)) = 0$, obtemos finalmente que

$$U_{\alpha\beta} = I_\alpha \int_{\mathcal{B}_o} \vec{B}_\beta \cdot d\vec{S} = I_\alpha \Phi_{\alpha\beta}$$

8.3.3 Energia Magnética Total:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{m_{tr}} = \frac{1}{2} \sum_\alpha I_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_{\alpha\beta} \\ U_{m_{def}} = \frac{1}{2} \sum_\alpha I_\alpha \Phi_{\alpha\alpha} \end{array} \right. \Rightarrow U_m = \frac{1}{2} \sum_\alpha I_\alpha \Phi_\alpha$$

$$\left(\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_{\alpha\beta} \right)$$

8.3.4 Densidade de Energia Magnética w_m no campo de um solenóide

Num solenóide com N espiras, secção S e comprimento $\ell \gg \sqrt{S}$, para uma corrente I , tem-se um fluxo

$$\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = N \frac{\mu N}{\ell} I S = \frac{\mu N^2 S}{\ell} I \quad (Wb = \text{Weber})$$

Coefficiente de Auto Indução:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu N^2 S}{\ell} \equiv \mu n^2 S \ell \quad (H = \text{Henry})$$

A densidade de energia armazenada dentro deste pode ser vista como

$$w_m = \frac{U_m}{S \ell} = \frac{\frac{1}{2} L I^2}{S \ell} = \frac{1}{2} (\mu n^2 S \ell) \frac{I^2}{S \ell} = \frac{1}{2} \frac{(\mu n I)^2}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

ou seja

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

8.3.5 Densidade de energia magnética no caso geral.

Fluxo Magnético em termos do potencial vector \vec{A}

$$\Phi_S = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Energia armazenada no campo magnético gerado por um conjunto arbitrário de correntes I_α

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_\alpha I_\alpha \Phi_\alpha = \frac{1}{2} \sum_\alpha \oint_{\partial S_\alpha} \vec{A}(\vec{\ell}_\alpha) \cdot (I_\alpha d\vec{\ell}_\alpha) \quad \Rightarrow \quad U_m = \frac{1}{2} \iiint \vec{A} \cdot \vec{J} dV$$

Identidade matemática: $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a})$

Usando a Lei de Ampère local $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ obtém-se

$$\vec{A} \cdot \vec{J} = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) + \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Substituindo na expressão da energia do campo magnético e usando a lei de Gauss para o campo $\vec{H} \times \vec{A}$

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint \vec{H} \cdot \vec{B} dV + \frac{1}{2} \oiint_{\infty} (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_\infty$$

Assumindo que no infinito o campo é nulo, o fluxo de $\vec{H} \times \vec{A}$ na superfície no infinito também se anula, e esta expressão reduz-se a

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \iiint w_m dV$$

Assim a densidade de energia armazenada no campo magnético em cada ponto dum espaço com permeabilidade magnética μ é

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

Exercício 8.1 — Ferromagnete com núcleo toroidal e fenda (entre-ferro).

Um toro ferromagnético, de permeabilidade relativa $\mu_r = 9 \times 10^3$, secção quadrada de lado $h = 10 \text{ mm}$ e raio exterior $R = 20 \text{ cm}$, tem uma fenda com uma abertura angular de $\theta = 5.4^\circ$. Um fio condutor enrolado à volta do toro formando $N = 6000$ espiras é percorrido por uma corrente $I = 11 \text{ A}$, como indicado na figura. Determine o coeficiente de auto-indução L do enrolamento e fração da energia magnética armazenada na fenda (ar). Despreze a dispersão de linhas de campo na fronteira do ferromagnete com o ar e assuma que o fluxo magnético é preservado no toro.

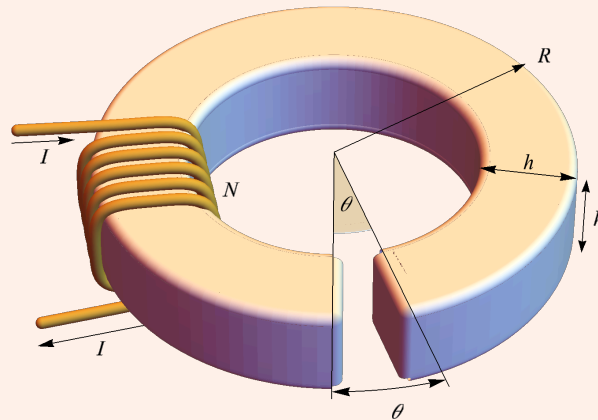


Figura 8.4: Ferromagnete toroidal com entreferro.

Resposta 8.1

- USANDO CIRCUITOS MAGNÉTICOS:

$$\mathfrak{R}_t \phi_t + \mathfrak{R}_f \phi_f = N \mathcal{I}$$

onde as relutâncias do toro e da fenda são, respetivamente,

$$\mathfrak{R}_t = \frac{\ell_t}{\mu S_t} = \frac{(R - \frac{1}{2}h)(2\pi - \theta)}{\mu_r \mu_o h^2} \quad ; \quad \mathfrak{R}_f = \frac{\ell_f}{\mu_o S_f} = \frac{(R - \frac{1}{2}h)\theta}{\mu_o h^2}$$

Assumindo que $\phi_t = \phi_f = \phi$ então

$$\phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}_t + \mathfrak{R}_f} = \frac{2h^2 I N \mu_o \mu_r}{(2R-h)(2\pi + \theta(\mu_r - 1))}$$

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{2h^2 N^2 \mu_o \mu_r}{(2R-h)(2\pi + \theta(\mu_r - 1))} = 2.444 \times 10^{-3} H$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{h^2 I^2 N^2 \mu_o \mu_r}{(2R-h)(2\pi + \theta(\mu_r - 1))}$$

$$\delta W_m^{ar} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \left(R - \frac{h}{2}\right) \theta h^2 = \frac{\theta h^2 I^2 N^2 \mu_o \mu_r^2}{(2R-h)(2\pi + \theta(\mu_r - 1))^2}$$

$$\frac{\delta W_m^{ar}}{W_m} = \frac{\mu_r \theta}{2\pi + \theta(\mu_r - 1)} = 99.3 \%$$

• USANDO LEI DE AMPÉRE

$$H_1 (2\pi - \theta)r + H_o \theta r = NI$$

$$B = \frac{I N \mu_o \mu_r}{r(2\pi + \theta(\mu_r - 1))}$$

$$\phi = \int_{R-h}^R \int_0^h \frac{I N \mu_o \mu_r}{r(2\pi + \theta(\mu_r - 1))} dz dr = \frac{h I N \mu_o \mu_r}{2\pi + \theta(\mu_r - 1)} \log\left(\frac{R}{R-h}\right)$$

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{h N^2 \mu_o \mu_r}{2\pi + \theta(\mu_r - 1)} \log\left(\frac{R}{R-h}\right) = 2.444 \times 10^{-3} H$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{h I^2 N^2 \mu_o \mu_r}{2(2\pi + \theta(\mu_r - 1))} \log\left(\frac{R}{R-h}\right)$$

$$\delta W_m^{ar} = \int_0^h \int_0^\theta \int_{R-h}^R \left(\frac{I^2 N^2 \mu_o \mu_r^2}{2r^2 (2\pi + \theta(\mu_r - 1))^2} \right) r dr d\varphi dz = \frac{\theta h I^2 N^2 \mu_o \mu_r^2}{2(2\pi + \theta(\mu_r - 1))^2} \log\left(\frac{R}{R-h}\right)$$

$$\frac{\delta W_m^{ar}}{W_m} = \frac{\mu_r \theta}{2\pi + \theta(\mu_r - 1)} = 99.3 \%$$

• INTEGRANDO A DENSIDADE DE ENERGIA MAGNÉTICA EM TODO O VOLUME

$$\begin{aligned}
 W_m &= \int_0^h \int_0^{2\pi-\theta} \int_{R-h}^R \frac{1}{2\mu_o\mu_r} \left(\frac{\mathcal{I}N\mu_o\mu_r}{2\pi r \left(1 + \frac{\theta(\mu_r-1)}{2\pi}\right)} \right)^2 r dr d\varphi dz + \\
 &+ \int_0^h \int_0^\theta \int_{R-h}^R \frac{1}{2\mu_o} \left(\frac{\mathcal{I}N\mu_o\mu_r}{2\pi r \left(1 + \frac{\theta(\mu_r-1)}{2\pi}\right)} \right)^2 r dr d\varphi dz = \\
 &= \frac{h\mathcal{I}^2N^2\mu_o\mu_r}{2(2\pi+\theta(\mu_r-1))} \log\left(\frac{R}{R-h}\right)
 \end{aligned}$$

• BINÁRIO SOBRE O NÚCLEO

$$\mathcal{T} = \partial_\theta \frac{h\mathcal{I}^2N^2\mu_o\mu_r}{2(2\pi+\theta(\mu_r-1))} \log\left(\frac{R}{R-h}\right) = -\frac{h\mathcal{I}^2N^2\mu_o(\mu_r-1)\mu_r}{2(2\pi+\theta(\mu_r-1))^2} \log\left(\frac{R}{R-h}\right)$$

8.3.6 Pressão Magnética na interface entre dois meios

8.3.6.1 Mantendo os fluxos constantes

Variação de Energia magnética com a introdução de um meio de volume V_1 e permeabilidade μ_1 num campo pré-existente \vec{B}_o num meio μ_o

$$\begin{aligned}
 (\Delta U_m)_\Phi &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1 - \vec{B}_o \cdot \vec{H}_o) dV_1 = \\
 &= -\frac{1}{2} \iiint_{V_1} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_o - \vec{B}_o \cdot \vec{H}_1) dV_1 + \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (\vec{B}_1 - \vec{B}_o) \cdot (\vec{H}_1 + \vec{H}_o) dV_1
 \end{aligned}$$

Na ausência de correntes de condução \vec{J}_c no volume V_1

$$\nabla \times (\vec{H}_1 + \vec{H}_o) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \psi : \quad \vec{H}_1 + \vec{H}_o = \nabla \psi$$

Então, usando a identidade $\nabla \cdot (\psi \vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \vec{a}$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_o) \cdot (\vec{H}_1 + \vec{H}_o) = (\vec{B}_1 - \vec{B}_o) \cdot \nabla \psi = \nabla \cdot (\psi (\vec{B}_1 - \vec{B}_o)) - \psi \nabla \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_o)$$

Mas $\nabla \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_o) \equiv 0$ sempre, pelo que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (\vec{B}_1 - \vec{B}_o) \cdot (\vec{H}_1 + \vec{H}_o) dV_1 &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \nabla \cdot (\psi (\vec{B}_1 - \vec{B}_o)) dV_1 = \\
 &= \iint_{\partial V_1} \frac{1}{2} \psi (\vec{B}_1 - \vec{B}_o) \cdot d\vec{S} = 0
 \end{aligned}$$

devido à continuidade da componente normal de \vec{B} na passagem entre os dois meios.

Para um sistema isolado, o trabalho realizado pelos campos deve verificar

$$\Delta W_{mec} + (\Delta U_m)_\Phi = 0 \implies \Delta W_{mec} = -(\Delta U_m)_\Phi = \iiint_{V_1} \frac{1}{2} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_o - \vec{B}_o \cdot \vec{H}_1) dV_1$$

$$\Delta W_{mec} = \iiint_{V_1} \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_o) \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_o dV_1$$

8.3.6.2 Mantendo as Correntes Constantes

Contudo, na presença de correntes de condução no volume V_1 , para manter constantes as correntes é também necessário realizar trabalho contra as forças eletromotrizes de indução magnética ΔW_{fem} , que em geral são o dobro da variação de energia armazenada no campo $(\Delta U_m)_J$.

$$\begin{aligned} (\Delta U_m)_J &= \iiint_{V_1} \frac{1}{2} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1 - \vec{B}_o \cdot \vec{H}_o) dV_1 = \\ &= \iiint_{V_1} \frac{1}{2} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_o - \vec{B}_o \cdot \vec{H}_1) dV_1 + \iiint_{V_1} \frac{1}{2} (\vec{B}_1 + \vec{B}_o) \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_o) dV_1 \end{aligned}$$

Como $\nabla \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_o) = 0$ existe um campo \vec{A} tal que $\vec{B}_1 + \vec{B}_o = \nabla \times \vec{A}$, pelo que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) \\ (\vec{B}_1 + \vec{B}_o) \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_o) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_o) = \vec{A} \cdot (\nabla \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_o)) + \nabla \cdot (\vec{A} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_o)) \end{aligned}$$

Se as correntes se mantêm constantes após a introdução do meio de permeabilidade μ_1 então $\nabla \times \vec{H}_o = \vec{J}_c = \nabla \times \vec{H}_1$, ou seja

$$\nabla \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_o) = 0$$

pelo que

$$\begin{aligned} \iiint_{V_1} \frac{1}{2} (\vec{B}_1 + \vec{B}_o) \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_o) dV_1 &= \iiint_{V_1} \frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{A} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_o)) dV_1 = \\ &= \iint_{\partial V_1} \frac{1}{2} \vec{A} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_o) \cdot d\vec{S}_1 = 0 \end{aligned}$$

porque, decompondo \vec{H} em componentes tangenciais e normais à superfície ∂V_1 , e dada a continuidade das componentes tangenciais na fronteira, obtém-se

$$\vec{A} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_o) \cdot d\vec{S}_1 = \vec{A} \times (\vec{H}_1^\perp - \vec{H}_o^\perp) \cdot d\vec{S}_1 = 0$$

já que $\vec{A} \times (\vec{H}_1^\perp - \vec{H}_o^\perp)$ resulta perpendicular a $d\vec{S}_1$ qualquer que seja \vec{A} . Assim

$$(\Delta U_m)_J = \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_o - \vec{B}_o \cdot \vec{H}_1) dV_1 = \iiint_{V_1} \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_o) \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_o dV_1$$

Para um sistema isolado contendo **as fontes necessárias para contrariar os efeitos da indução magnética nas correntes**, a variação total de energia verifica

$$\Delta W_{mec} + (\Delta U_m)_J + \Delta W_{fem} = 0 \implies \Delta W_{mec} + (\Delta U_m)_J - 2(\Delta U_m)_J = 0 \implies \Delta W_{mec} = (\Delta U_m)_J$$

$$\Delta W_{mec} = \iiint_{V_1} \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_o) \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_o dV_1$$

Pressão magnética

No limite em que o volume V_1 introduzido corresponde a um deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$ de uma fronteira entre dois meios semi-infinitos de permeabilidades diferentes $dV_1 = d\vec{S} \cdot d\vec{r}$ então podemos considerar que

$$(\Delta U_m)_J = \frac{1}{2} \iint_{S_1} (\mu_1 - \mu_o) \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_o d\vec{S} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \iint_{S_1} (\mu_1 - \mu_o) \left(\vec{H}_1^{\parallel} \cdot \vec{H}_o^{\parallel} + \vec{H}_1^{\perp} \cdot \vec{H}_o^{\perp} \right) d\vec{S} \cdot d\vec{r}$$

Devido à continuidade das componentes tangenciais de \vec{H} e normais de \vec{B} na superfície S_1 podemos escrever

$$(\Delta U_m)_J = \frac{1}{2} \iint_{S_1} (\mu_1 - \mu_o) \left(|\vec{H}_o^{\parallel}|^2 + \frac{1}{\mu_1 \mu_o} |\vec{B}_o^{\perp}|^2 \right) d\vec{S} \cdot d\vec{r}$$

pelo que, designando por p_m a pressão magnética na superfície fronteira

$$\Delta W_{mec} = \iint_S p_m \vec{n} \cdot d\vec{r} dS = \frac{1}{2} \iint_S (\mu_1 - \mu_o) \left(|\vec{H}_o^{\parallel}|^2 + \frac{1}{\mu_1 \mu_o} |\vec{B}_o^{\perp}|^2 \right) \vec{n} \cdot d\vec{r} dS$$

Conclui-se assim que na fronteira entre dois meios de permeabilidade diferentes existe uma pressão no sentido do meio de mais fraca permeabilidade:

$$p_m = \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_o) \left(|\vec{H}_o^{\parallel}|^2 + \frac{1}{\mu_1 \mu_o} |\vec{B}_o^{\perp}|^2 \right)$$

Para um campo de 1T essencialmente perpendicular à superfície de V_1 , com $\mu_1 \gg \mu_o$, a pressão obtida sobre o material é de quase 4 atmosferas!

$$p_m \simeq \frac{1}{2\mu_o} |\vec{B}_o^{\perp}|^2 = \frac{10^7 N}{8\pi m^2} = 3.92 \text{ Atm}$$

8.4 Potencial Vetor na Gauge de Lorentz $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ **8.4.0.1 Equações de Campo e Invariância de Gauge**

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Dada a liberdade de gauge

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$$

é possível escolher uma Gauge de Lorentz Λ tal que Λ , ϕ e \vec{A} obedecem a

$$\nabla^2 \Lambda - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \quad \therefore \quad \nabla \cdot \vec{A}' + \mu\epsilon \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda = \mu\epsilon \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi'}{\partial t}$$

8.4.0.2 Equações para os Potenciais dependentes do tempo

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi' - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \vec{A}' - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \end{cases}$$

8.5 Campo magnético \vec{H} na matéria :

8.5.1 Magnetização \vec{M} e Correntes de Magnetização

Para uma distribuição contínua de momentos dipolares magnéticos, a **MAGNETIZAÇÃO** é o momento dipolar por unidade de volume:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

8.5.2 Campo de uma distribuição contínua de momentos dipolares magnéticos

Tendo em conta que o **Potencial Vetor** \vec{A} do campo magnético \vec{B} é definido para uma distribuição arbitrária de correntes com densidade $\vec{J}(\vec{s})$ como :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV(\vec{s})$$

Longe de um dipolo magnético de momento \vec{m} , o potencial vetor \vec{A} e o campo magnético \vec{B} podem ser descritos por

$$\vec{A}_m(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Assim, para uma distribuição de momentos dipolares com uma densidade $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$, deve-se ter

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{M}(\vec{s}) \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} dV(\vec{s}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{M}(\vec{s}) \times \nabla_{\vec{s}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right) dV(\vec{s})$$

Tendo em conta a identidade

$$\nabla \times (f \vec{M}) = \nabla f \times \vec{M} + f \nabla \times \vec{M}$$

$$\vec{M} \times \nabla f = f \nabla \times \vec{M} - \nabla \times (f \vec{M})$$

pode-se escrever com $f(\vec{s}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|}$

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\iiint_V \frac{\nabla_{\vec{s}} \times \vec{M}(\vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV(\vec{s}) + \oint_{\partial V} \frac{\vec{M}(\vec{s}) \times d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right)$$

onde usamos a identidade seguinte para transformar o integral de volume envolvendo o termo $\nabla \times (f\vec{M})$:

$$\iiint_V (\nabla \times \vec{a}) dV = - \oiint_{\partial V} \vec{a} \times d\vec{S}$$

• **Demonstração**

Usando um vetor \vec{b} constante arbitrário e a identidade $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \iiint_V (\nabla \times \vec{a}) dV &= \\ &= \iiint_V \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) dV = \iiint_V \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) dV = \oiint_{\partial V} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot d\vec{S} = \\ &= -\vec{b} \cdot \oiint_{\partial V} \vec{a} \times d\vec{S} \end{aligned}$$

8.5.3 Densidades de corrente de Magnetização

Definem-se assim densidades de corrente de magnetização em volume e superfície

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad ; \quad \vec{J}'_m = \vec{M} \times \vec{n}$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_m(\vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|} dV(\vec{\ell}) + \frac{\mu_o}{4\pi} \oiint_{\partial V} \frac{\vec{J}'_m(\vec{\ell})}{|\vec{r} - \vec{\ell}|} dS(\vec{\ell})$$

8.5.4 Potencial escalar magnético para um campo de dipolos magnéticos.

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{M}(\vec{s}) \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} dV(\vec{s}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \vec{M}(\vec{s}) \times \nabla_{\vec{s}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right) dV(\vec{s})$$

$$\vec{B}_m(\vec{r}) = \nabla_{\vec{r}} \times \vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \nabla_{\vec{r}} \times (\vec{M}(\vec{s}) \times \vec{K}(\vec{r} - \vec{s})) dV(\vec{s})$$

onde designámos $\vec{K} = \nabla_{\vec{s}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right)$. Como $\vec{M}(\vec{s})$ não depende de \vec{r} ,

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \times (\vec{M} \times \vec{K}) &= (\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{K}) \vec{M} - (\vec{M} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{K} = \quad 1 \\ &= 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{s}) \vec{M} - \nabla_{\vec{r}} (\vec{M} \cdot \vec{K}) \quad 2 \end{aligned}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \vec{M} 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{s}) dV(\vec{s}) - \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \vec{M} \cdot \vec{K} dV(\vec{s}) \right)$$

¹ $\nabla \times (\vec{M} \times \vec{K}) = (\nabla \cdot \vec{K}) \vec{M} - (\vec{K} \cdot \nabla) \vec{M} + (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{K} - (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{K}$ onde $\nabla \cdot \vec{K} = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{s})$

² $\nabla (\vec{M} \cdot \vec{K}) = (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{K} + (\vec{K} \cdot \nabla) \vec{M} + \vec{M} \times (\nabla \times \vec{K}) + \vec{K} \times (\nabla \times \vec{M})$ notando que $\nabla \times \vec{K} = 0$.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_o \vec{M}(\vec{r}) - \mu_o \nabla \Phi_m(\vec{r})$$

O "Potencial Escalar Magnético" é assim

$$\Phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{M} \cdot \vec{K} dV(\vec{s}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\nabla_{\vec{s}} \cdot \left(\frac{\vec{M}(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|} \right) - \frac{\nabla_{\vec{s}} \cdot \vec{M}(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|} \right) dV(\vec{s}) \quad 3$$

$$\Phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \frac{\vec{M}(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|} \cdot d\vec{S}(\vec{s}) + \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{-\nabla_{\vec{s}} \cdot \vec{M}(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|} dV(\vec{s})$$

$$\Phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \frac{\sigma_m(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|} dS(\vec{s}) + \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho_m(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|} dV(\vec{s})$$

As densidades de carga magnética são, à semelhança das densidades de carga de polarização

$$\sigma_m(\vec{s}) = \vec{M}(\vec{s}) \cdot \vec{n}(\vec{s}) \quad ; \quad \rho_m(\vec{s}) = -\nabla_{\vec{s}} \cdot \vec{M}(\vec{s})$$

e a "Lei de Coulomb Magnética" é para o campo de magnetização

$$\vec{B}_m(\vec{r}) = \mu_o \vec{M}(\vec{r}) + \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_{\partial V} \frac{\sigma_m(\vec{s})(\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3} dS(\vec{s}) + \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho_m(\vec{s})(\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3} dV(\vec{s})$$

Para um campo puramente devido a momentos dipolares magnéticos com densidade \vec{M} podemos escrever:

$$\vec{B}_m = \mu_o \vec{H}_m + \mu_o \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_m = -\nabla \Phi_m$$

8.5.5 Campo de uma barra uniformemente magnetizada

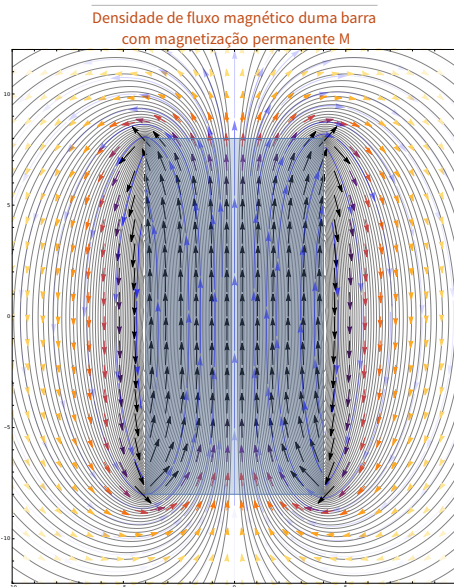


Figura 8.5: Densidade de fluxo magnético \vec{B}_m duma barra uniformemente magnetizada.

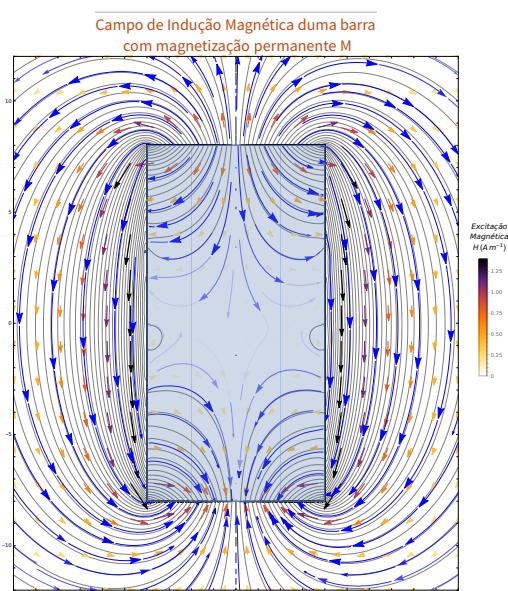
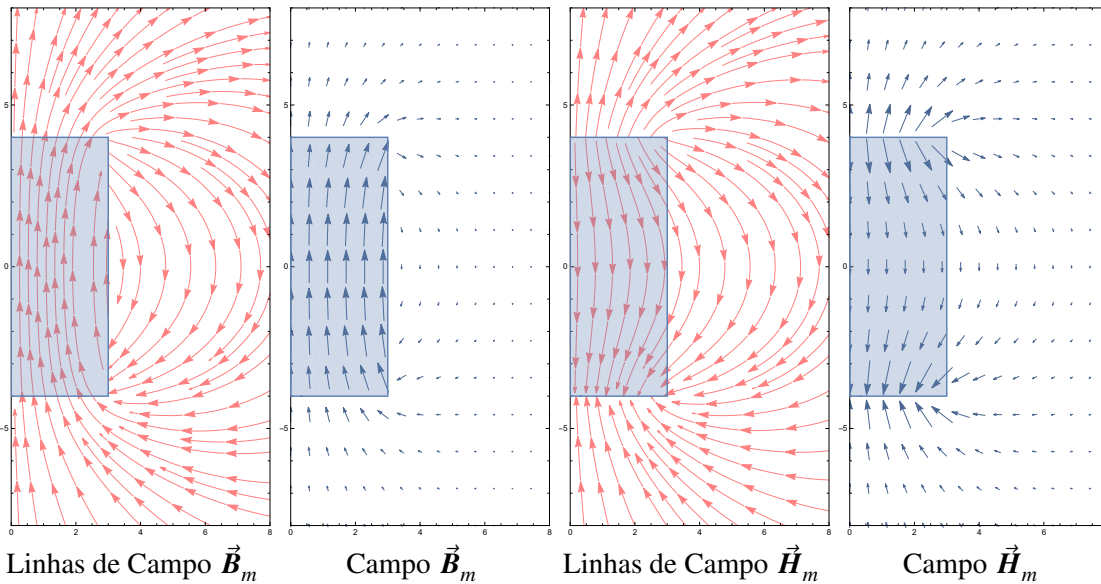


Figura 8.6: Campo $\vec{H}_m = \frac{1}{\mu_o} \vec{B}_m - \vec{M}$ dentro e fora da barra da Figura (8.5).

³ $\vec{M} \cdot \vec{K} = \nabla \cdot (\psi \vec{M}) - \psi \nabla \cdot \vec{M}$ onde $\psi = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|}$.

Uma barra cilíndrica de comprimento $2 \times L$ e raio a está uniformemente magnetizada com magnetização $\vec{M} = M \vec{e}_z$. O potencial escalar magnético é

$$\begin{aligned} \Phi_m(\rho, z) &= \sum_{z_o=\pm L} \frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_m(z_o)r}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi) + (z-z_o)^2}} d\phi dr = \\ &= \sum_{z_o=\pm L} \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{(r-\rho)^2 + (z-z_o)^2}} K\left(-\frac{4r\rho}{(r-\rho)^2 + (z-z_o)^2}\right) dr \end{aligned}$$



8.5.6 Condições fronteira para os campos \vec{B} e \vec{H} .

Enquanto para o campo de indução magnética \vec{B} não existem 'cargas magnéticas' porque se tem sempre $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ mas podem existir 'cargas de magnetização' em superfície $\sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n}$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{B}_m &= -\mu_o \nabla \Phi_m + \mu_o \vec{M} = \mu_o \vec{H} + \mu_o \vec{M} \\ (\vec{B}(\pm L^+) - \vec{B}(\pm L^-)) \cdot \vec{e}_z &= 0 \\ (\vec{B}(\pm L^+) - \vec{B}(\pm L^-)) \cdot \vec{e}_\rho &= \mp \mu_o \vec{M} \cdot \vec{e}_\rho \equiv 0 \\ (\vec{B}(a^+) - \vec{B}(a^-)) \cdot \vec{e}_\rho &= \vec{M} \cdot \vec{e}_\rho = 0 \\ (\vec{H}(a^+) - \vec{H}(a^-)) \cdot \vec{e}_z &= 0 \implies (\vec{B}(a^+) - \vec{B}(a^-) + \mu_o \vec{M}) \cdot \vec{e}_z = 0 \\ (\vec{B}(a^+) - \vec{B}(a^-)) \cdot \vec{e}_z &= -\mu_o \vec{M} \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \right.$$

para a intensidade do campo magnético \vec{H} podemos concluir que existem 'cargas magnéticas' com densidade volúmica $\nabla \cdot \vec{H} = \rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}$ e superficial $\sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{H} = -\nabla\Phi_m & \sigma_m(\pm L \vec{e}_z) = \pm \vec{M} \cdot \vec{e}_z \\ \left(\vec{H}(\pm L^+) - \vec{H}(\pm L^-) \right) \cdot \vec{e}_z = -\sigma_m(\pm L \vec{e}_z) = \mp \vec{M} \cdot \vec{e}_z & \text{porque } \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \\ \left(\vec{H}(\pm L^+) - \vec{H}(\pm L^-) \right) \cdot \vec{e}_\rho = 0 & \text{porque } \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \equiv 0 \\ \left(\vec{H}(a^+) - \vec{H}(a^-) \right) \cdot \vec{e}_\rho = \sigma_m(a \vec{e}_\rho) = 0 \\ \left(\vec{H}(a^+) - \vec{H}(a^-) \right) \cdot \vec{e}_z = 0 \end{array} \right.$$

8.5.7 Lei de Ampère na matéria

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \left(\sum_k I_k \right)_{\text{atravessa } S}$$

Lei de Ampère em geral:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} = \mu_o (\vec{J} + \vec{J}_m) = \mu_o (\vec{J} + \nabla \times \vec{M}) & \implies \\ \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_o \iint_S (\vec{J} + \vec{J}_m) \cdot d\vec{S} & \implies \\ \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o (I + I_m)_S & \end{aligned}$$

A vantagem de usar a intensidade de campo magnético \vec{H} na Lei de Ampère resulta de apenas ser necessário ter em conta as correntes de condução.

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \right) = \vec{J} & \implies \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} & \implies \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \implies \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_S \end{aligned}$$

Exercício 8.2 — Ferromagnete com núcleo retangular.

Um ferromagnete com um núcleo quadrado de permeabilidade relativa $\mu_r = 7 \times 10^3$ tem um lado com secção reta $2 \times S = 18 \text{ cm}^2$ onde há um enrolamento de $N_1 = 4000$ espiras. Os restantes lados têm secção reta S , um dos quais com um enrolamento de $N_2 = 9000$ espiras e outro exibindo uma fenda de espessura $\delta = 13 \text{ mm}$, como indicado na figura.

Considerando um percurso médio de comprimento $d = 13 \text{ cm}$ em cada braço do ferromagnete, e sabendo que os enrolamentos são percorridos por correntes $I_1 = 3 \text{ A}$ e $I_2 = 15 \text{ A}$ no sentido indicado na figura,

- determine o fluxo magnético ϕ_m numa secção do núcleo assumindo que o fluxo magnético é preservado nos diferentes lados do núcleo.
- determine o valor médio do campo de indução magnética \vec{B}_{ar} na fenda (ar), assumindo que as linhas de campo magnético não se dispersam muito na transição do ferromagnete para o ar nessa região.

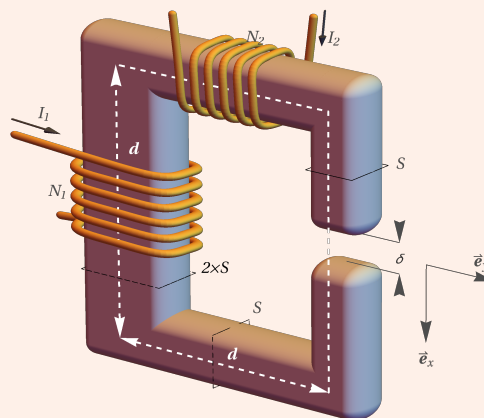
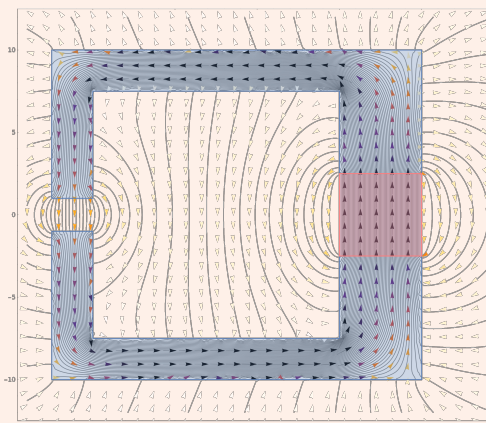


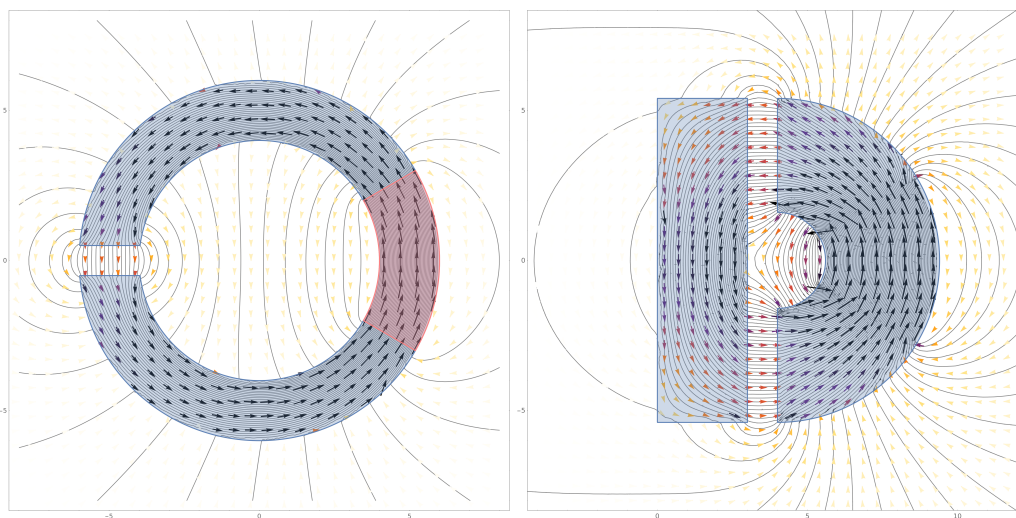
Figura 8.7: Ferromagnete de núcleo retangular com fenda.



Resposta 8.2

$$\text{a) } \phi_m = \frac{N_1 I_1 - N_2 I_2}{\frac{d}{\mu_r \mu_0} + \frac{3d - \delta}{\mu_r \mu_0} + \frac{\delta}{\mu_0}} = \frac{2S \mu_0 \mu_r (N_1 I_1 - N_2 I_2)}{7d + 2\delta(\mu_r - 1)}$$

$$\text{b) } B_{ar} = \frac{\phi_m}{S} = \frac{2 \mu_0 \mu_r (N_1 I_1 - N_2 I_2)}{7d + 2\delta(\mu_r - 1)}$$



8.5.8 Efeito dum campo magnético em correntes de Ampère: Modelo de Langevin

Assumindo correntes elementares constituídas por electrões em movimento circular de raio R e velocidade v , podemos assumir uma frequência $\omega_o = \frac{v}{R}$ e consequentemente uma corrente

$$I = -\frac{q_e}{T} = -\frac{q_e}{2\pi} \omega_o$$

Em consequência existe um momento magnético orbital

$$\vec{m} = I \pi R^2 \vec{n} = -\frac{1}{2} q_e R^2 \vec{\omega}_o$$

Numa situação de órbita circular de raio R , deve existir uma força centrípeta tal que

$$F_{cp} = m_e \omega_o^2 R$$

A introdução de um campo magnético \vec{B} acelera ou desacelera o electrão conforme a orientação de \vec{B} . Devido à força de Laplace adicional $\vec{F}_m = q_e \vec{v} \times \vec{B}$ temos agora

$$F_{cp} + F_m = m_e \omega_o^2 R \pm q_e \omega R B = m_e \omega^2 R$$

$$\pm q_e \omega B = m_e (\omega^2 - \omega_o^2) = m_e (\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o) = 2m_e \Delta \omega \omega_m$$

Assumindo $\omega_m \approx \omega$ a variação de frequência é

$$|\Delta \omega| = \frac{|q_e| B}{2m_e}$$

A variação de momento magnético dum electrão é

$$\Delta \vec{m} = -\frac{1}{2} |q_e| R^2 \Delta \vec{\omega} = -\frac{q_e^2}{4m_e} R^2 \mu_o \vec{H}$$

Somando para todos os electrões numa molécula, assumindo n moléculas por unidade de volume

$$\vec{M} = -\left(\frac{\mu_o q_e^2 n}{4m_e} \sum_i R_i^2\right) \vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

8.5.9 Susceptibilidade Magnética χ_m e Permeabilidade Magnética $\mu = \mu_o(1 + \chi_m)$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_o(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_o(1 + \chi_m)$$

Em geral $|\chi_m| \ll 1$ para substâncias paramagnéticas ou diamagnéticas ($|\chi_m| \sim 10^{-6}, \mu \sim \mu_o$).

8.5.10 Diamagnéticas ($\chi_m < 0$) (repelidas por um campo magnético forte): $\vec{m} \equiv 0; \langle \vec{M} \rangle = 0$

Na ausência de um campo magnético exterior, os átomos e moléculas destes materiais não possuem momento magnético $\vec{m} = 0$ pelo que o valor médio da magnetização também é nulo $\langle \vec{M} \rangle = 0$.

Na presença de campos magnéticos exteriores, aparece uma magnetização que tende a reduzir o campo exterior.

- Quando a força de Laplace $\vec{F}_m \propto -\vec{e}_r$, ou seja quando o electrão viaja no sentido directo relativamente à direcção de \vec{B} , o momento magnético $\vec{m} \parallel -\vec{B}$, e então a força centrípeta aumenta, o que significa que $\Delta\omega > 0$, ou seja $\Delta\vec{m} \parallel -\vec{B}$.
- Quando $\vec{F}_m \propto \vec{e}_r$, ou seja quando o electrão viaja no sentido retrógrado relativamente a \vec{B} , o momento magnético $\vec{m} \parallel \vec{B}$, e a força centrípeta diminui, o que significa que $\Delta\omega < 0$, ou seja $\Delta\vec{m} \parallel -\vec{B}$ como anteriormente.

- Cobalto, Bismuto;

Diamagnetismo sapo

Diamagnetismo morango

8.5.11 Paramagnéticas ($\chi_m > 0$) (atraídas por um campo magnético forte): $\vec{m} \neq 0; \langle \vec{M} \rangle = 0$

Na ausência de um campo magnético exterior, os átomos e moléculas destes materiais possuem um momento magnético $\vec{m} \neq 0$, mas estando aleatoriamente orientados o valor médio da magnetização é nulo $\langle \vec{M} \rangle = 0$.

Na presença de um campo magnético exterior, os momentos magnéticos individuais tendem a orientar-se na direcção do campo magnético exterior, criando uma magnetização que tende a reforçar o campo exterior.

- Alumínio;

$$\vec{\tau}_m = \vec{M}_o \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad (\vec{M}_o \text{ alinha-se com } \vec{B})$$

$$\vec{F}_m = (\vec{M}_o \cdot \nabla) \vec{B} \quad \Rightarrow \quad (\text{Força no sentido de } \vec{B} \text{ a aumentar})$$

Tabela 8.1: Suscetividade magnética volúmica χ_m .

Substância Paramagnética		Substância Diamagnética	
Platina	2.9×10^{-4}	Azoto	$-5. \times 10^{-9}$
Crómio	2.7×10^{-4}	Sílica	-4.2×10^{-6}
Nióbio	2.6×10^{-4}	Cobre	-9.8×10^{-6}
Tungsténio	6.8×10^{-5}	Bismuto	-1.66×10^{-5}
Alumínio	2.3×10^{-5}	Chumbo	-1.7×10^{-5}
Lítio	2.1×10^{-5}	Diamante	-2.2×10^{-5}
Calcio	1.9×10^{-5}	Prata	-2.6×10^{-5}
Magnésio	1.2×10^{-5}	Mercúrio	-2.9×10^{-5}
Oxigénio	2.1×10^{-6}	Ouro	-3.6×10^{-5}

Para uma listagem mais completa ver Haynes [1].

8.5.12 Ferromagnéticas ($\chi_m \gg 1$): $\vec{m} \neq 0$; $\langle \vec{M} \rangle \neq 0$

Os materiais ferromagnéticos têm uma estrutura cristalina com iões cujo momento magnético é devido essencialmente ao spin eletrónico.

Iões adjacentes têm tendência a alinhar os seus momentos magnéticos com forças que equivalem a intensidades de campo da ordem de $10^5 T$ em regiões de dimensão $\approx 10^{-5} m$.

Em materiais anti-ferromagnéticos os iões adjacentes têm os momentos magnéticos alinhados em sentidos opostos, por isso a magnetização resultante é nula $\langle \vec{M}_o \rangle = 0$ ou pequena se houver assimetria na estrutura cristalina (ferrites).

Substância	Tipo de grupo	Perm. Rel. (μ_r)
Bismuto	Diamagnético	0.99983
Prata	Diamagnético	0.99998
Chumbo	Diamagnético	0.999983
Cobre	Diamagnético	0.999991
Água	Diamagnético	0.999991
Vácuo †	Não magnético	1.
Ar	Paramagnético	1.000004
Alumínio	Paramagnético	1.00002
Paládio	Paramagnético	1.0008
Permalloy 2-81 em pó (2 Mo, 81 Ni) ‡	Ferromagnético	130.
Cobalto	Ferromagnético	250.
Níquel	Ferromagnético	600.
Ferroxcube 3 (Mn-Zn-ferrite em pó)	Ferromagnético	1,500.
Aço Mole (0.2 °C)	Ferromagnético	2,000.
Ferro (0.2 impurezas)	Ferromagnético	5,000.
Ferro de silício (4 Si)	Ferromagnético	7,000.
Permalloy 78 (78.5 Ni)	Ferromagnético	100,000.
Mumetal (75Ni, 5Cu, 2Cr)	Ferromagnético	100,000.
Ferro purificado (0.05 impureza)	Ferromagnético	200,000.
Supermalloy (5 Mo, 79 Ni) §	Ferromagnético	1,000,000.

† Por definição.

‡ Composição percentual. O restante é ferro e Impurezas.

§ Usado em aplicações de transformador com fita contínua enrolada (Sem fenda).

Tabela 8.2: Permeabilidades relativas μ_r

Domínios de Weiss e curvas de histerese

Para Substâncias ferromagnéticas $\vec{M} \neq \chi_m \vec{H}$ em geral, mas define-se à mesma uma relação entre os campos magnéticos e a magnetização (Curvas de Histerese) em que instantaneamente $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

A curva de Histerese representa a magnetização resultante da reorientação de domínios de magnetização quando submetidas a campos externos fortes

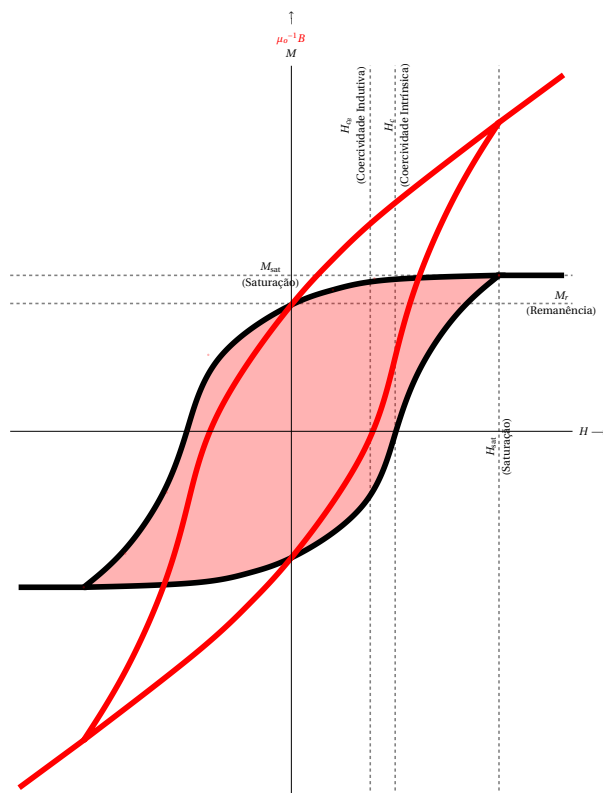


Figura 8.8: Curva de histerese de um material magnético $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$ e $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

Temperatura de Curie

A dependência da magnetização média da temperatura absoluta T atinge para substâncias ferromagnéticas um limite à temperatura de Curie, em que passam a comportar-se como substâncias paramagnéticas.

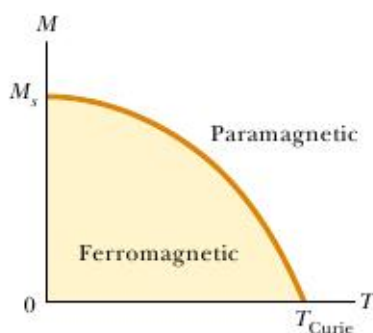


Figura 2

Curie Temperatures for Several Ferromagnetic Substance	
Substance	$T_{\text{Curie}}(\text{K})$
Iron	1 043
Cobalt	1 394
Nickel	631
Gadolinium	317
Fe_2O_3	893

Figura 3

Problema 8.1 — INDUTÂNCIA DUMA BOBINA TOROIDAL.

Uma bobina toroidal, com 1 m de raio exterior e 20 cm de raio interior, é percorrida por uma corrente de 5.0 A e tem 60 espiras por metro. No centro tem ferro que nestas condições se pode supor como tendo uma permeabilidade magnética $\mu = 5000\mu_0$.

- Qual seria o campo na ausência do ferro? Qual é a indutância desta bobina sem o ferro?
- Qual é o campo magnético com o ferro? Qual é a indutância desta bobina com o ferro?

Solução 8.1

- O comprimento total da bobina é $L = 2\pi R = 6.28 \text{ m}$ pelo que o número total de espiras é $N = 60 \times L = 377$.
- No interior da bobina, dado que o raio exterior $R = 1 \text{ m}$ é muito maior que o raio interior $r = 0.2 \text{ m}$, vamos considerar que o campo \vec{B} é aproximadamente constante em cada secção reta da bobina. Obviamente, devido à simetria de rotação em torno do eixo do toro, o campo numa secção obtém-se do campo de qualquer outra secção através da rotação que converte uma na outra. A utilização da Lei de Ampère ao longo duma circunferência γ de raio R passando pelo centro do toro permite-nos determinar a componente azimutal $B_\varphi \vec{e}_\varphi$ do campo \vec{B} . Em coordenadas cilíndricas $\{\rho, \varphi, z\}$ com eixo \vec{e}_z coincidente com o eixo do toro devemos escrever, parametrizando a circunferência γ com o ângulo azimutal $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\vec{r}_\gamma = R \vec{e}_\rho \equiv R (\cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y) \quad \text{ponto sobre a circunferência } \gamma$$

$$d\vec{r}_\gamma = R d\varphi \vec{e}_\varphi \equiv R d\varphi (-\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y) \quad \text{deslocamento infinitesimal sobre } \gamma$$

$$\oint_\gamma \vec{B}(\vec{r}_\gamma) \cdot d\vec{r}_\gamma = \int_0^{2\pi} B_\varphi(R) R d\varphi = B_\varphi(R) 2\pi R \quad B_\varphi \text{ não depende de } \varphi \text{ (simetria axial)}$$

$$B_\varphi(R) 2\pi R = \mu_0 N I \quad N \text{ é o número total de espiras na bobina}$$

$$B_\varphi(R) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{377 \times 5}{2\pi \times 1} \approx 3.7 \text{ (G)} \quad \text{componente de } \vec{B} \text{ na direcção } \vec{e}_\varphi$$

- Em qualquer outro ponto no interior da bobina assumimos que B_φ tem a mesma magnitude que $B_\varphi[R]$. Para o fluxo do campo através de uma secção reta da bobina ($\vec{S} = S\vec{e}_\varphi$) correspondente a uma só espira obtemos

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_\varphi(R)S = \mu_o \frac{NI}{2\pi R} \pi r^2$$

- Como as linhas de campo atravessam de forma semelhante todas as N espiras da bobina, o fluxo total é

$$\Phi = N\phi = \mu_o \frac{N^2 r^2}{2R} I = \mathcal{L}_o I$$

- Da expressão anterior obtemos a indutância

$$\mathcal{L}_o = \frac{d\Phi}{dI} = \mu_o \frac{N^2 r^2}{2R} \quad \therefore \quad \mathcal{L}_o = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{377^2 \times 0.2^2}{2 \times 1} = 3.57 \times 10^{-3} \quad (H)$$

- Quando consideramos o núcleo de ferro deve-se substituir μ_o por $\mu = 5000\mu_o$, pelo que

$$B_\varphi(R) = \mu \frac{NI}{2\pi R} = 5000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{377 \times 5}{2\pi \times 1} \approx 1.85 \quad (T)$$

$$\mathcal{L}_f = \mu \frac{N^2 r^2}{2R} = 5000\mathcal{L}_o = 17.86 \quad (H)$$

Problema 8.2 — TRANSFORMADOR COM NÚCLEO DE SECÇÃO S.

Determine a razão entre as forças eletromotrices no primário e no secundário de um transformador com N_p espiras no primário e N_s espiras no secundário, enroladas à volta dum mesmo núcleo de secção S .

Solução 8.2

- **FLUXO NO PRIMÁRIO:**

Primário com corrente I_p e número total de espiras N_p num comprimento ℓ_p .

Em cada espira do primário o fluxo de \vec{B} corresponde ao do seu próprio campo mais o do secundário:

$$\phi_p = B_p S_p + \phi_{sp} \quad \text{com} \quad B_p = \frac{\mu N_p I_p}{\ell_p}$$

No primário o fluxo total será

$$\Phi_p = N_p \phi_p = N_p \left(\frac{\mu N_p I_p}{\ell_p} S_p + \phi_{sp} \right)$$

O coeficiente de auto-indução L_p no primário será

$$\Phi_p = L_p I_p + M_{sp} I_s \quad \implies \quad L_p = \frac{\mu S_p N_p^2}{\ell_p} \quad ; \quad M_{sp} I_s = N_p \phi_{sp}$$

- **FLUXO NO SECUNDÁRIO:**

Secundário com corrente I_s e número total de espiras N_s num comprimento ℓ_s .

$$\Phi_s = N_s \phi_s = N_s \left(\frac{\mu N_s I_s}{\ell_s} S_s + \phi_{ps} \right)$$

Se tivéssemos $\phi_s = \phi_p$,

$$\Phi_s = N_s \left(\frac{\mu N_p I_p}{\ell_p} S_p + \phi_{sp} \right) = \frac{\mu S_p}{\ell_p} N_p N_s I_p + N_s \phi_{sp} = M_{ps} I_p + L_s I_s \quad \Rightarrow \quad L_s I_s = N_s \phi_{sp}$$

$$\phi_{sp} = \frac{\mu S_s}{\ell_s} N_s I_s \quad \Rightarrow \quad M_{sp} = \frac{\mu S_s}{\ell_s} N_s N_p$$

$$L_s = \frac{\mu S_s}{\ell_s} N_s^2 \quad ; \quad M_{ps} = \frac{\mu S_p}{\ell_p} N_s N_p \quad (\neq M_{sp} ??)$$

$$\Phi_s = \frac{\mu S_p}{\ell_p} N_s N_p I_p + \frac{\mu S_s}{\ell_s} N_s^2 I_s = N_s \phi_{ps} + \frac{\mu S_s}{\ell_s} N_s^2 I_s$$

$$\phi_{ps} = \frac{\mu S_p}{\ell_p} N_p I_p$$

Como se verifica, assumindo a preservação do fluxo e a forma do campo em ambas secções do núcleo leva a uma contradição quando $S_p \neq S_s$. Portanto deve haver uma perda de fluxo dependendo da geometria.

Assumindo então que $\phi_p = \gamma \phi_s$ para um factor γ a determinar, podemos prosseguir assumindo agora as equações básicas

$$\phi_p = \gamma \phi_s \quad ; \quad \begin{cases} \Phi_p = N_p \phi_p = L_p I_p + M I_s \\ \Phi_s = N_s \phi_s = M I_p + L_s I_s \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} L_p = \mu \frac{N_p^2}{\ell_p} S_p \\ L_s = \mu \frac{N_s^2}{\ell_s} S_s \end{cases}$$

A resolução destas equações impondo que M seja independente das correntes leva à conclusão que:

$$\begin{cases} \phi_p = \frac{\mu N_p I_p}{\ell_p} S_p + \mu N_s I_s \sqrt{\frac{S_p S_s}{\ell_p \ell_s}} = \left(B_p + B_s \sqrt{\frac{S_s \ell_s}{S_p \ell_p}} \right) S_p \\ \phi_s = \mu N_p I_p \sqrt{\frac{S_p S_s}{\ell_p \ell_s}} + \frac{\mu N_s I_s}{\ell_s} S_s = \left(B_p \sqrt{\frac{S_p \ell_p}{S_s \ell_s}} + B_s \right) S_s \\ M = \mu N_p N_s \sqrt{\frac{S_p S_s}{\ell_p \ell_s}} = \sqrt{L_p L_s} \end{cases} \quad ; \quad \gamma = \sqrt{\frac{S_p \ell_s}{S_s \ell_p}}$$

Assim, só no caso de $\gamma = 1$ é que se tem uma igualdade $\phi_p = \phi_s$, o que é garantido nas mais frequentes geometrias enrolando o primário e o secundário à volta do mesmo troço do núcleo.

• **FORÇAS ELECTROMOTRIZES:**

$$\mathcal{E}_p = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -N_p \frac{d\phi_p}{dt} \quad ; \quad \mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi_s}{dt} = -N_s \frac{d\phi_s}{dt}$$

Se $\phi_p = \phi_s$ então $\frac{d\phi_p}{dt} = \frac{d\phi_s}{dt}$ e

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

• **CIRCUITOS MAGNÉTICOS**

Podemos usar a aproximação dos circuitos magnéticos para o cálculo de coeficientes de indução de um transformador com primário de secção S_p e comprimento ℓ_p , secundário de secção S_s e comprimento ℓ_s e braços de secção S_b e comprimento ℓ_b . As equações do circuito são

$$\begin{cases} N_p I_p + N_s I_s = \mathfrak{R}_p \phi_p + \mathfrak{R}_s \phi_s + 2\mathfrak{R}_b \phi_b \\ \phi_p = \phi_b = \phi_s \end{cases}$$

onde as relutâncias são

$$\mathfrak{R}_p = \frac{\ell_p}{\mu S_p} \quad ; \quad \mathfrak{R}_s = \frac{\ell_s}{\mu S_s} \quad ; \quad \mathfrak{R}_b = \frac{\ell_b}{\mu S_b}$$

Conclui-se assim que

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_s + 2\mathfrak{R}_b \quad ; \quad \phi_p = \phi_s = \frac{N_p}{\mathfrak{R}_{eq}} I_p + \frac{N_s}{\mathfrak{R}_{eq}} I_s$$

$$\Phi_p = N_p \phi_p = L_p I_p + M_{ps} I_s \quad ; \quad \Phi_s = N_s \phi_s = M_{sp} I_p + L_s I_s$$

donde se conclui que

$$L_p = \frac{N_p^2}{\mathfrak{R}_{eq}} \quad ; \quad L_s = \frac{N_s^2}{\mathfrak{R}_{eq}} \quad ; \quad M = \frac{N_s N_p}{\mathfrak{R}_{eq}}$$

$$\text{com } \mathfrak{R}_{eq} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\ell_p}{S_p} + \frac{\ell_s}{S_s} + 2 \frac{\ell_b}{S_b} \right)$$

Referências

- [1] W. Haynes. «Magnetic susceptibility of the elements and inorganic compounds». Em: *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. 94th. CRC Press, 2013, páginas 4–131 (ver página 236).



Ótica Ondulatória

9	Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas	247
9.1	Equações de Maxwell em forma integral	
9.2	Equações de Maxwell microscópicas	
9.3	Solução de Ondas Planas	
9.4	Equações de Fresnel	
9.5	Alteração de fase na reflexão	
9.6	Interferência de duas ondas: Experiência de Young	
9.7	Redes de difração	
9.8	Crítério de Rayleigh	
9.9	Princípio de Huygens (1660)	
9.10	Difração de Fraunhofer	



9. Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

Conteúdo

9.1	Equações de Maxwell em forma integral	248
9.1.1	Lei de Ampère Infinitesimal	248
9.1.2	Potencial Vector \vec{A} e equação de Poisson	248
9.1.3	Lei de Faraday Infinitesimal (circuito infinitesimal fixo)	249
9.1.4	Forma potencial dos campos variáveis	249
9.2	Equações de Maxwell microscópicas	249
9.2.1	Condições Fronteira campo Magnético	250
9.2.2	Vetor de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	251
9.2.3	Propagação em Ondas Planas	252
9.3	Solução de Ondas Planas	253
9.3.1	Vector de Poynting \vec{S}	255
9.3.2	Tensor de stress Eletromagnético	258
9.3.3	Aplicações: Polarização, Índice de refração, Leis de Snell	261
9.3.4	Ângulo de Brewster	263
9.3.5	Lei de Malus	264
9.4	Equações de Fresnel	264
9.4.1	Ondas planas, Refração e Difração	264
9.4.2	Onda Transverso-Magnética (TM) ou Onda-p	265
9.4.3	Onda Transverso-Elétrica (TE) ou Onda-s	268
9.5	Alteração de fase na reflexão	270

9.6	Interferência de duas ondas: Experiência de Young	271
9.6.1	Intensidade das riscas de interferência	273
9.7	Redes de difração	274
9.8	Crítério de Rayleigh	276
9.9	Princípio de Huygens (1660)	277
9.10	Difração de Fraunhofer	277
9.10.1	Lei de Bragg	279

9.1 Equações de Maxwell em forma integral

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{D} \, dV = \iiint_V \rho_c \, dV \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} \, dV = 0 \\ \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$$

9.1.1 Lei de Ampère Infinitesimal

$$\oiint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o I_S \quad \Rightarrow \quad \iint_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_o \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}$$

9.1.2 Potencial Vector \vec{A} e equação de Poisson

Uma vez que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ é sempre solução de

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

e como em geral

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

e tendo em conta que

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{s})$$

tem-se em geral que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_o \vec{J}(\vec{r})$$

Uma vez que

$$\nabla \cdot (\psi \vec{a}) = \nabla \psi \cdot \vec{a} + \psi \nabla \cdot \vec{a}$$

no caso de **correntes estacionárias** com $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ podemos mostrar que é sempre possível escolher \vec{A} tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|} \right) dV(\vec{s}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla_{\vec{s}} \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|} \right) dV(\vec{s}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\partial V} \frac{\vec{J}(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|} \cdot d\vec{S}(\vec{s}) = 0$$

Esta identidade segue do facto de podermos usar a fronteira ∂V do volume V suficientemente afastada de qualquer distribuição de correntes de forma que $\vec{J}(\vec{s}) = 0$ em todos os seus pontos.

9.1.3 Lei de Faraday Infinitesimal (circuito infinitesimal fixo)

$$\mathcal{E}_{em} = \oint_{\partial S} \vec{E}(\vec{\ell}) \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{E}_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{s}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

9.1.4 Forma potencial dos campos variáveis

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

9.2 Equações de Maxwell microscópicas

A forma infinitesimal das equações de Maxwell é dada pela seguinte tabela

EQUAÇÕES MAXWELL	MEIOS LHI	RELAÇÕES GERAIS
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{J}_c = \sigma_e \vec{E}$	$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E})$
$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$	$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$
$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$	$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$

Tabela 9.1: Equações de Maxwell e relações entre campos e correntes

9.2.1 Condições Fronteira campo Magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \iff (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n} = \vec{J}_s$$

Das equações de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad \text{Lei de Gauss Eléctrica} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Lei de Gauss Magnética} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Lei de Faraday} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Lei de Ampère} \end{array} \right.$$

No caso de um meio onde não há cargas nem correntes estas equações são homogéneas e permitem deduzir as condições fronteira à passagem de um meio I para um meio II

$$\left\{ \begin{array}{l} D_I^\perp = D_{II}^\perp \\ B_I^\perp = B_{II}^\perp \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} E_I^\parallel = E_{II}^\parallel \\ H_I^\parallel = H_{II}^\parallel \end{array} \right.$$

De facto, usando caixas de Gauss com bases de área ΔS paralelas (e altura desprezável), ou circuitos rectangulares com lados $\Delta \ell$ paralelos (e largura desprezável), colocados de cada lado da superfície de separação entre os meios I e II , podemos mostrar que, **na ausência de cargas livres** $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ ou **de correntes de condução** $\vec{J} = 0$ junto à superfície

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = (E_I^\parallel - E_{II}^\parallel) \Delta \ell = 0 \\ \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = (H_I^\parallel - H_{II}^\parallel) \Delta \ell = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (D_I^\perp - D_{II}^\perp) \Delta S = 0 \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (B_I^\perp - B_{II}^\perp) \Delta S = 0 \end{array} \right.$$

Densidade de energia no campo

$$u_{em} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

Potência **transmitida** por unidade de volume

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_{em}}{\partial t} &= -\left(\varepsilon E \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \frac{\partial H}{\partial t} \right) = \\ &= -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \\ &= -\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H} - \vec{J}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \\ &= \vec{E} \cdot \vec{J} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} \end{aligned}$$

onde usámos $\vec{\mathcal{S}} = \vec{E} \times \vec{H}$ para representar o **Vetor de Poynting** e a identidade

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$

O termo $\vec{E} \cdot \vec{J}$ representa a densidade de **dissipação Ohmica** de correntes de condução existentes no volume.

$$-\frac{dU_{em}}{dt} = -\iiint_V \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV = \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}}) dV = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV + \oiint_{\partial V} \vec{\mathcal{S}} \cdot d\vec{S}$$

Assim o fluxo de $\vec{\mathcal{S}} = \vec{E} \times \vec{H}$ através de uma superfície fechada contabiliza a transferência de energia electromagnética através da superfície que delimita o volume.

9.2.2 Vetor de Poynting $\vec{\mathcal{S}} = \vec{E} \times \vec{H}$

O campo de vectores $\vec{\mathcal{S}} = \vec{E} \times \vec{H}$ representa uma **densidade de fluxo de energia electromagnética**, ou a **taxa de fluxo de energia electromagnética por unidade de área**, ou a **potência transmitida por unidade de área**. Na ausência de correntes

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -\oiint_{\partial V} \vec{\mathcal{S}} \cdot d\vec{S}$$

9.2.2.1 Equação de Ondas Electromagnéticas em meios lineares

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) + \mu \sigma_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B} = \mu \nabla \times \vec{J} + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{D}) \quad \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu \sigma_c \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

9.2.2.2 Equação de ondas na ausência de cargas ($\rho = 0$) em meio não-condutor ($\sigma_c = 0$)

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

9.2.2.3 Solução Geral

Cada uma das componentes dos campos \vec{E} e \vec{B} verifica a equação de ondas

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

quando $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. Estas equações têm solução geral

$$\psi(\vec{r}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + g(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$$

com $f(\xi)$ e $g(\eta)$ funções arbitrárias, desde que se verifique a **RELAÇÃO DE DISPERSÃO**

$$|\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$\nabla \psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{df}{d\xi} \nabla \xi \right)_{\xi=\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t} + \left(\frac{dg}{d\eta} \nabla \eta \right)_{\eta=\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t} = \left(f'(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + g'(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t) \right) \vec{k}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \psi(\vec{r}, t)) = \vec{k} \cdot \nabla \left(f'(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + g'(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t) \right) = \vec{k} \cdot \left(\left(\frac{d^2 f}{d\xi^2} \nabla \xi \right)_{\xi=\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t} + \left(\frac{d^2 g}{d\eta^2} \nabla \eta \right)_{\eta=\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t} \right)$$

$$\therefore \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = \left(f''(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + g''(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t) \right) |\vec{k}|^2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \left(\frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{\xi=\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t} + \left(\frac{dg}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{\eta=\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t} = \left(-f'(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + g'(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t) \right) \omega$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \left(-\left(\frac{d^2 f}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{\xi=\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t} + \left(\frac{d^2 g}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{\eta=\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t} \right) \omega$$

$$\therefore \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \left(f''(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + g''(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t) \right) \frac{\omega^2}{v^2}$$

9.2.3 Propagação em Ondas Planas

9.2.3.1 Solução Ondas Planas $f(\xi) = f_0 e^{i\xi}$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}; \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t)} \end{cases} \implies \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 & \implies \vec{k} \cdot \vec{E} = 0; \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \implies \vec{k}_1 \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{E} = i \vec{k} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \omega_1 \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{E}_o = \omega_1 \vec{B}_o e^{i((\vec{k}_1 - \vec{k}) \cdot \vec{r} - (\omega_1 - \omega)t)}$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{k}_1 = \vec{k}; \\ \omega_1 = \omega; \\ \vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases}$$

$$|\vec{k} \times \vec{E}| = \omega |\vec{B}| \quad \Rightarrow \quad \frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{|\vec{k}|}{\omega} = \frac{1}{c} \equiv \sqrt{\mu \epsilon}$$

9.2.3.2 Número de Ondas \vec{k} e Frequência Angular ω

$$\text{Comprimento de onda: } \lambda \quad \text{Número de ondas: } \kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\text{Período: } T \quad \text{Frequência angular: } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

9.2.3.3 Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo

- Fase de onda: $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{v}_f t) \quad \therefore$

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_f = \omega \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{\omega}{k} = v \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

- Velocidade de fase: $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}_f \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_f = \frac{\omega}{k^2} \vec{k}$

- ϕ constante $\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}_f \right) = 0 \quad \therefore \quad \vec{v}_f = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{\phi=\text{const}}$

- Velocidade de grupo: $\vec{v}_g = \nabla_{\vec{k}} \omega(\vec{k})$

9.3 Solução de Ondas Planas

Procurando soluções da forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_o e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t)}$$

Introduzindo nas equações de Maxwell obtêm-se os constrangimentos

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_1 \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = i \vec{k} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \omega_1 \vec{B}$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega_1 \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{B}$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega_1 \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{E}_o = \omega_1 \vec{B}_o e^{i((\vec{k}_1 - \vec{k}) \cdot \vec{r} - (\omega_1 - \omega)t)}$$

Para permanecer válida para todo o \vec{r} e todo o instante t , o expoente tem que ser nulo, o que significa

$$\vec{k}_1 = \vec{k} \quad ; \quad \omega_1 = \omega;$$

$$|\vec{k} \times \vec{E}| = \omega |\vec{B}| \quad \Rightarrow \quad \frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{|\vec{k}|}{\omega} = \frac{1}{c} \equiv \sqrt{\mu \epsilon}$$

9.3.0.1 Relação de Dispersão

$$k c = \omega$$

Relação entre \vec{E} e \vec{B} para ondas planas

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}| \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}| = c |\vec{B}|$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = -\frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{H}$$

$$|\vec{D}| = \frac{1}{c} |\vec{H}| \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}| = Z |\vec{H}|$$

$$Z = \mu c = \frac{1}{\epsilon c} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

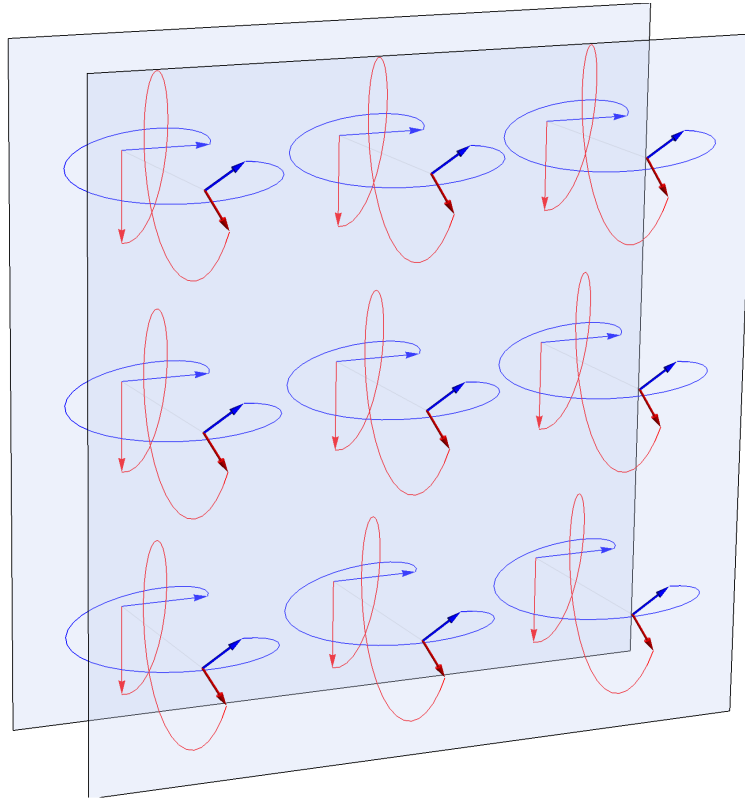


Figura 9.1: Onda plana elípticamente polarizada

9.3.1 Vector de Poynting \vec{S}

9.3.1.1 Densidade de Energia eletromagnética

$$w_{em} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w_{em}}{\partial t} &= -\left(\epsilon E \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \frac{\partial H}{\partial t}\right) = -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \\ &= -\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial w_{em}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{S}$$

9.3.1.2 Vector de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{E} \times \frac{\sqrt{\mu\epsilon} \vec{n} \times \vec{E}}{\mu} = \frac{1}{Z} E^2 \vec{n} \quad \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

com $Z = \mu c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ a impedância intrínseca do meio.

9.3.1.3 Densidade Média de Fluxo de Energia para uma onda plana linearmente polarizada

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{E} \times \vec{H}| dt = \frac{E_o^2}{Z} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \frac{2\pi}{T} t \right) dt = \frac{1}{2Z} E_o^2$$

Para uma onda elípticamente polarizada o resultado é o dobro

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{Z} E_o^2$$

Vector de Poynting numa onda plana

O vector de Poynting é a **taxa de fluxo de energia electromagnética por unidade de área**, ou a **potência transmitida por unidade de área**.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu\omega} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{Z} E^2 \vec{u}_{\vec{k}} \quad \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

com $Z = \frac{\mu\omega}{k} = \mu c$ a **impedância intrínseca do meio**. Para o vácuo

$$Z_o = \mu_o c_o = 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 = 120\pi \quad (\Omega)$$

onde $c_o = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}$ é a velocidade da luz no vácuo.

O módulo $S = |\vec{E} \times \vec{H}|$ representa a energia transportada pela onda EM que atravessa uma unidade de área por segundo.

$$S = |\vec{S}| = \frac{1}{Z} |\vec{E}|^2$$

Intensidade numa onda EM plana

$$\langle w_{em} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \epsilon E^2 + \frac{1}{\mu c^2} E^2 \rangle = \langle \epsilon E^2 \rangle$$

O valor médio no tempo de $S = |\vec{S}|$ designa-se **intensidade da onda I** . Em geral

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle = \frac{1}{Z} \langle E^2 \rangle$$

Para uma onda linearmente polarizada

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |\vec{E} \times \vec{H}| dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{E_o^2}{\mu c} \cos^2 \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{1}{2Z} E_o^2$$

porque

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2(\alpha t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1 + \cos(2\alpha t)}{2} dt = \frac{1}{2} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\alpha\tau)}{4\alpha\tau} = \frac{1}{2}$$

A intensidade de uma onda eletromagnética é igual ao produto da densidade de energia média $\langle w_{em} \rangle$ com a sua velocidade de propagação c , ou seja, a energia que chega em média por unidade de tempo e por unidade de área. Para uma onda plana $|\vec{H}| = \frac{1}{Z} |\vec{E}|$, portanto com $Z = \mu c$ e $c^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{Z} \langle E^2 \rangle = \frac{1}{\epsilon\mu c} \langle \epsilon E^2 \rangle = c \langle w_{em} \rangle$$

Pressão de radiação

A densidade volúmica de momento linear numa onda eletromagnética é

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

Se a radiação, propagando-se na direção definida por $\vec{k} = k\vec{u}_k$ com velocidade c , incide sobre um elemento de área $\Delta \vec{A}$, a quantidade de momento linear que é absorvida num tempo Δt nessa área corresponde à que existe numa caixa de volume $\Delta V = c \Delta t \vec{u}_k \cdot \Delta \vec{A}$, ou seja

$$\Delta p = \frac{|\vec{S}|}{c^2} \Delta V = \frac{1}{c} \vec{S} \cdot \vec{n} \Delta A \Delta t$$

Para uma superfície ΔA que absorve completamente a radiação, esta exerce uma pressão

$$p_{rad} = \frac{1}{\Delta A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{|\vec{S} \cdot \vec{n}|}{c}$$

Para uma superfície refletora que re-emite toda a radiação que recebe, a pressão de radiação duplica.

Problema: Radiação Solar

- Considere que a luz solar tem uma intensidade de 1 kW m^{-2} .
- Qual é o valor médio do campo elétrico da luz solar?
- Qual é o valor médio do campo magnético da luz solar?
- Qual é o valor da energia eletromagnética associada a essa luz solar num cubo de ar de 5 m de lado?

Solução

- Qual é o valor médio do campo magnético da luz solar?

Tendo em conta a definição de intensidade de uma onda plana $\mathcal{I} = \frac{1}{2} \langle E^2 \rangle$,

$$\sqrt{\langle B^2 \rangle} \equiv \frac{1}{c_0} \sqrt{\langle E^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mathcal{I}}{c_0}} = 2 \times 10^{-6} \quad (T)$$

- Qual é o valor médio do campo elétrico da luz solar (relembrando que $Z_0 = 120 \pi (\Omega)$)?

$$\sqrt{\langle E^2 \rangle} = \sqrt{Z_0 \mathcal{I}} = \sqrt{120 \pi \times 10^3} \approx 614 \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

- Qual é o valor da energia electromagnética associada a essa luz solar num cubo de ar de 5 m de lado?

Assumindo uma caixa com uma face de área A perpendicular a \vec{S} , toda a radiação EM à distância $\ell = c \times \Delta t$ desta face atravessa a área A dentro do intervalo de tempo Δt .

Assim a energia EM deste volume $V = \ell \times A$ é igual a

$$\Delta U_{em} = u_{em} c \Delta t A$$

onde $u_{em} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$ designa a **DENSIDADE DE ENERGIA NO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**.

A **POTÊNCIA TRANSMITIDA PELA RADIAÇÃO POR UNIDADE DE ÁREA** é

$$\langle S \rangle = \mathcal{I} = c u_{em}$$

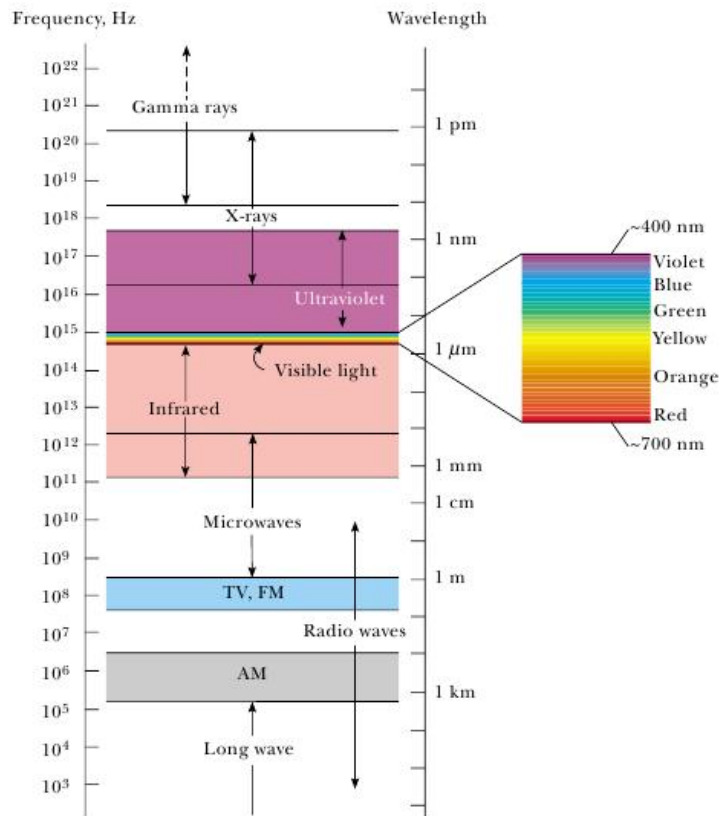


Figura 9.2:

$$u_{em} = \frac{\mathcal{I}}{c} = \frac{1 \times 10^3}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3} \times 10^{-5} \left(\frac{J}{m^3} \right)$$

Para um cubo de ar com $5m$ de lado temos um volume $V = 125m^3$ pelo que a energia radiante no seu interior será

$$U_{em} = u_{em}V = 125 \times \frac{1}{3} \times 10^{-5} = 4.17 \times 10^{-4} (J)$$

Número de Ondas \vec{k} e Frequência Angular ω

Comprimento de onda:	λ (m)
Número de ondas:	$k = \frac{2\pi}{\lambda} (m^{-1})$
Período:	T (s)
Frequência angular:	$\omega = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{rad}{s} \right)$

9.3.2 Tensor de stress Eletromagnético

$$\vec{F}_{em} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad d\vec{F}_{em} = \rho \vec{E} dV + \vec{J} \times \vec{B} dV$$

Usando as equações de Maxwell

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{F}}{dV} &= \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} + \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \times \vec{B} = \\
&= (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) - \frac{\partial \vec{D} \times \vec{B}}{\partial t} + \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \\
&= (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{H} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) - \varepsilon\mu \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{H})}{\partial t} = \\
&= (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} + (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla(\vec{E} \cdot \vec{D}) + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{H} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{H} - \frac{1}{2}\nabla(\vec{B} \cdot \vec{H}) - \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \\
&= \nabla \cdot \left(\vec{E} \otimes \vec{D} + \vec{B} \otimes \vec{H} - \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})\mathbf{1} \right) - \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \equiv \nabla \cdot \vec{T}_{em} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(\vec{E} \cdot \vec{D}) &= (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{D} + (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{E} + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{D}) + \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) = \\
&= 2\left((\vec{D} \cdot \nabla)\vec{E} + \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) \right) \\
&\implies \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{2}\nabla(\vec{E} \cdot \vec{D}) - (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{E}
\end{aligned}$$

$$\partial_x(D_x E_x) + \partial_y(D_y E_x) + \partial_z(D_z E_x) = E_x \nabla \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \nabla E_x$$

9.3.2.1 Força total num volume V

$$\vec{F} = \int \int_{\partial V} \vec{T}_{em} \cdot d\vec{S} - \int \int \int_V \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} dV \implies \int \int_{\partial V} \vec{T}_{em} \cdot d\vec{S} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d}{dt} \int \int \int_V \frac{1}{c^2} \vec{S} dV$$

9.3.2.2 Tensor de stress eletromagnético de Maxwell

$$\vec{T}_{em} = \vec{E} \otimes \vec{D} + \vec{B} \otimes \vec{H} - \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})\mathbf{1}$$

9.3.2.3 Densidade volúmica de momento linear do campo eletromagnético

$$\vec{p}_{em} = \varepsilon\mu \vec{S} \equiv \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

9.3.2.4 Análise dimensional

$$\left[\frac{1}{c^2} \vec{S} \right] = \frac{[W][s]^2}{[m]^4} = \frac{[J][s]}{[m]^4} = \frac{[Kg]}{[m]^2[s]} \equiv \frac{[Kg][m][s]}{[m]^3}$$

MATERIAL	Comprim. Onda λ (nm)	Índice Refração n
GASES A 0°C E 1 atm		
Ar	529.29	1.00029
Dióxido de carbono	589.29	1.001
Hélio	589.29	1.00004
Hidrogênio	589.29	1.00013
LÍQUIDOS A 20°C		
Benzeno	589.29	1.501
Disulfeto de carbono	589.29	1.628
Tetracloro de carbono	589.29	1.461
Etanol (álcool etílico)	589.29	1.361
Óleo de silicone		1.336 - 1.582
Água	589.29	1.33
SÓLIDOS À TEMPERATURA AMBIENTE		
Dióxido de titânio (fase rutilo)	589.29	2.614
Diamante	589.29	2.419
Carboneto de silício (Moissanite)		2.65 - 2.69
Titanato de estrôncio	589.29	2.41
Âmbar	589.29	1.55
Sílica fundida (quartzo fundido)	589.29	1.458
Cloreto de sódio	589.29	1.544
OUTROS MATERIAIS		
Hélio líquido		1.025
Água gelada		1.31
Criolita		1.338
Acetona		1.36
Politetrafluoroetileno (Teflon)		1.35 - 1.38
Córnea (humana)		1.373/1.380/1.401
Lente (humana)		1.386 - 1.406
Fígado (humano)	964.	1.369
A mucosa intestinal (humana)	964.	1.329-1.338
Querosene		1.39
Ácido poliláctico		1.46
Pyrex (um vidro borossilicato)		1.47
Vidro acrílico		1.490 - 1.492
Placa de vidro (vidro da janela)		1.52
Coroa de vidro (puro)		1.50 - 1.54
Coroa de vidro (impuro)		1.485 - 1.755
Vidro de sílex (puro)		1.60 - 1.62
Bromo		1.661
Vidro de sílex (impuro)		1.523 - 1.925
Safira		1.762 - 1.778
Zircônia cúbica		2.15 - 2.18
Silício	1200 - 8500	3.42 - 3.48
Fosforeto de gálio (III)		3.5
Arseneto de gálio (III)		3.927
Germânio	3000 -16000	4.05 - 4.01

Tabela 9.2: Índices de refração para alguns materiais

Índice de refração:

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \simeq \sqrt{\epsilon_r}$$

porque $\mu \simeq \mu_0$ em geral para materiais não-magnéticos.

9.3.3 Aplicações: Polarização, Índice de refração, Leis de Snell

A solução em onda plana da equação de ondas para o campo elétrico pode ser escrita geralmente em notação complexa como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

onde $\vec{E}_o = \mathcal{E}_x \vec{e}_x + \mathcal{E}_y \vec{e}_y + \mathcal{E}_z \vec{e}_z$ é um vetor fixo de componentes complexas $\mathcal{E}_x = |\mathcal{E}_x| e^{i\phi_x}$, etc. Desta forma a solução real para o campo é a parte real $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{E}(\vec{r}, t))$ desta expressão complexa

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = |\mathcal{E}_x| e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_x)} \vec{e}_x + |\mathcal{E}_y| e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_y)} \vec{e}_y + |\mathcal{E}_z| e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_z)} \vec{e}_z$$

i.e.

$$E_x(\vec{r}, t) = |\mathcal{E}_x| \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_x)$$

$$E_y(\vec{r}, t) = |\mathcal{E}_y| \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_y)$$

$$E_z(\vec{r}, t) = |\mathcal{E}_z| \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_z)$$

A condição de ortogonalidade de \vec{E} e \vec{k} restringem o movimento de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ao plano perpendicular a \vec{k} , pelo que $\vec{E}_o \cdot \vec{k} = 0$ em qualquer instante e ponto do espaço. Escolhendo um referencial em que $\vec{k} = k \vec{e}_z$, isto significa que $\mathcal{E}_z = 0$ pelo que neste referencial $E_{x'}(\vec{r}, t) = |\mathcal{E}_{x'}| \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_{x'})$ e $E_{y'}(\vec{r}, t) = |\mathcal{E}_{y'}| \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_{y'})$. A radiação diz-se:

- **Polarizada Elípticamente** quando $|\mathcal{E}_{x'}| \neq |\mathcal{E}_{y'}|$ ou $\phi_{x'} - \phi_{y'} \neq \frac{\pi}{2}(\text{mod } \pi)$
- **Polarizada Circularmente** quando $|\mathcal{E}_{x'}| = |\mathcal{E}_{y'}|$ e $\phi_{x'} - \phi_{y'} = \frac{\pi}{2}(\text{mod } \pi)$
- **Polarizada Linearmente** quando $\phi_{x'} = \phi_{y'}(\text{mod } \pi)$
- A polarização diz-se **Esquerda** ou **Direita** conforme $\phi_{x'} - \phi_{y'}$ é positivo ou negativo.

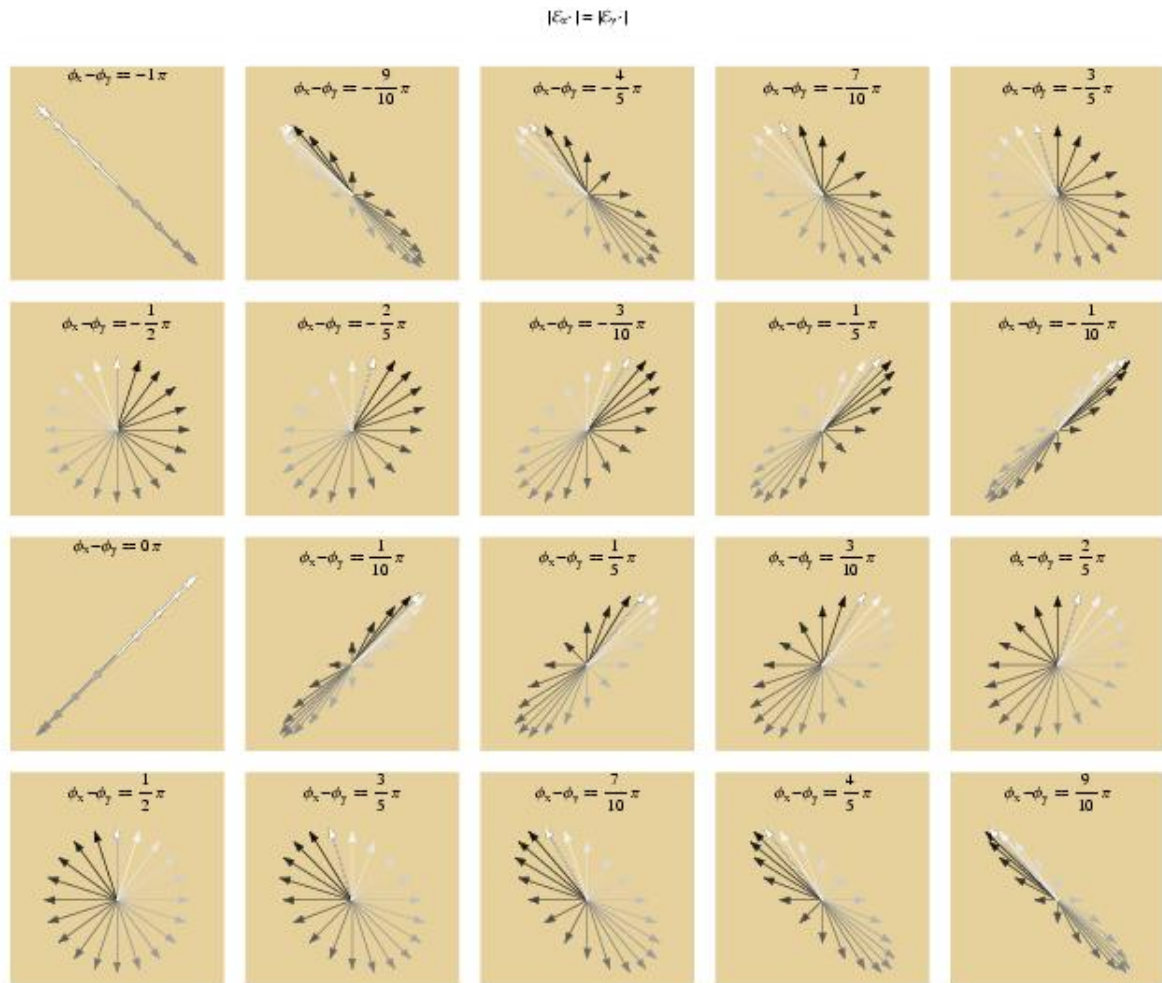


Fig. 3.1: Polarizações de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ - Evolução temporal de $t = 0$ (Preto) a $t = T$ (branco)

Índice de refração:

A razão entre a velocidade da luz no vácuo e num meio material é o índice de refração:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r} > 1 \quad \kappa_1 \sin(\theta_1) = \kappa_{1'} \sin(\theta_{1'}) = \kappa_2 \sin(\theta_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

porque $\mu \approx \mu_0$ em geral.

Lei de Snell:

Na interface de dois meios a fase das ondas incidente, refletida e refratada devem coincidir devido à condição fronteira $\vec{E}_1^{\parallel}(\vec{r}, t) = \vec{E}_2^{\parallel}(\vec{r}, t)$

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

Reflexão Total:

Na passagem de um meio mais refringente para um meio menos refringente ($n_1 > n_2$) o ângulo de refração é necessariamente maior que o ângulo de incidência, pela lei de Snell. Quando o ângulo de refração for $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ teremos

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

e como $\frac{n_2}{n_1} < 1$ esta equação define um ângulo de reflexão total.

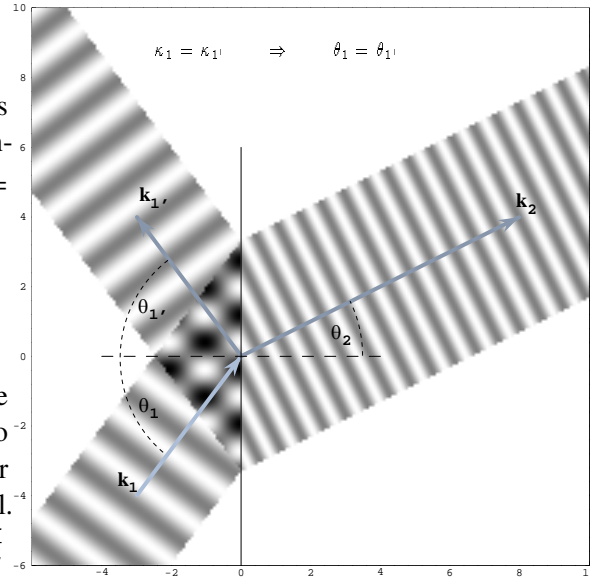


Fig. 3.2: Lei de Snell

9.3.4 Ângulo de Brewster

Quando a direcção de transmissão é perpendicular à de reflexão, $\theta_{\tau_B} = \frac{\pi}{2} - \theta_{r_B} = \frac{\pi}{2} - \theta_{i_B}$, o ângulo de incidência denominado de Brewster verifica $\sin(\theta_{\tau_B}) = \cos(\theta_{i_B})$ e então

$$\frac{n_{II}}{n_I} = \frac{\sin(\theta_{i_B})}{\sin(\theta_{\tau_B})} = \frac{\sin(\theta_{i_B})}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_{i_B})} = \tan(\theta_{i_B}) \quad \Rightarrow \quad \theta_{i_B} = \tan^{-1}\left(\frac{n_{II}}{n_I}\right)$$

Quando $\mu_I = \mu_{II} = 1$ então $\frac{\epsilon_{II}}{\epsilon_I} = \tan^2(\theta_B)$ e então a onda refletida não tem componente paralela ao plano de incidência, e portanto sai linearmente polarizada na direcção \vec{n}_p perpendicular ao plano de incidência.

$$\begin{cases} (\mathcal{E}_{\pi_i} \pm \mathcal{E}_{\pi_r}) \cos(\theta_{i_B}) \sin(\theta_{i_B}) = \mathcal{E}_{\pi_\tau} \sin^2(\theta_{i_B}) \\ (\mathcal{E}_{\pi_i} \mp \mathcal{E}_{\pi_r}) \sin(\theta_{i_B}) \cos(\theta_{i_B}) = \mathcal{E}_{\pi_\tau} \sin^2(\theta_{i_B}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pm 2\mathcal{E}_{\pi_r} \sin(\theta_{i_B}) \cos(\theta_{i_B}) = 0 \quad \therefore \quad \mathcal{E}_{\pi_r} = 0$$

Isto acontece porque as ondas refletida e transmitida são de facto radiação emitida pelas mesmas moléculas na superfície de separação, excitadas pela radiação incidente. Se a direcção da onda

transmitida é perpendicular à da onda refletida, então a componente do campo elétrico que oscila paralelamente ao plano de incidência pode excitar dipolos a oscilar paralelamente ao plano de incidência na direção perpendicular à onda transmitida, i.e. com eixo na direção da onda refletida, e assim gerar o campo elétrico da onda transmitida. Estes dipolos a oscilar paralelamente ao plano de incidência e eixo na direção da onda refletida não podem emitir nessa direção. A componente do campo elétrico paralela ao plano de incidência não se pode então propagar na onda refletida, ficando apenas a componente do campo elétrico perpendicular ao plano de incidência a propagar-se nessa onda. Obviamente, se a radiação incidente já for polarizada na direção perpendicular ao plano de incidência, então todos os ângulos produzem radiação refletida igualmente polarizada.

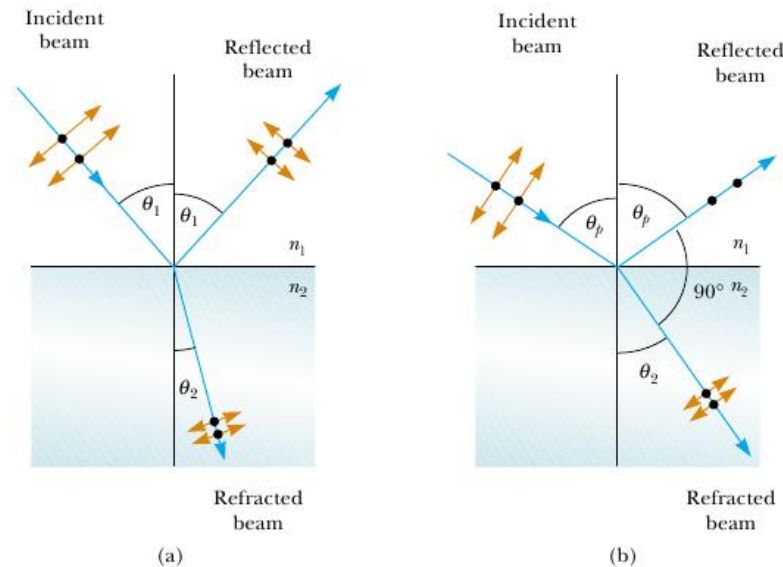


Figura 1

9.3.5 Lei de Malus

A intensidade de uma onda após passar por dois polarizadores com direções de polarização rodadas de um ângulo θ é

$$I = I_o \cos^2(\theta)$$

9.4 Equações de Fresnel

9.4.1 Ondas planas, Refração e Difração

9.4.1.1 Transmissão e reflexão numa interface entre dois meios.

Assumindo que \vec{n} é normal à superfície de separação dos meios, no sentido do meio incidente para o meio de refração, então as componentes de \vec{E} e \vec{D} , respetivamente paralelas e perpendiculares à superfície de separação dos meios, são

$$\vec{E}^{\parallel} = \vec{n} \times (\vec{E} \times \vec{n}) \quad ; \quad \vec{D}^{\perp} = \epsilon (\vec{E} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

O plano de incidência definido por \vec{k}_i e \vec{n} tem uma normal $\vec{n}_{\pi} = \vec{n} \times \frac{\vec{k}_i}{k_i}$

Em qualquer das ondas incidente, refletida e transmitida, podemos decompor o campo elétrico \vec{E} na sua **componente-p (paralela ao plano de incidência)**

$$\vec{E}_p = \vec{n}_{\pi} \times (\vec{E} \times \vec{n}_{\pi})$$

e na sua **componente-s (perpendicular ao plano de incidência)**

$$\vec{E}_s = (\vec{E} \cdot \vec{n}_\pi) \vec{n}_\pi$$

Como é evidente \vec{E}_s é sempre paralelo à superfície de separação dos meios porque \vec{n}_π o é, mas \vec{E}_p tem componentes

$$\vec{E}_p^\parallel = \vec{n} \times (\vec{E}_p \times \vec{n}) = E_p \cos(\theta_i) \vec{n} \times \vec{n}_\pi \quad ; \quad \vec{E}_p^\perp = (\vec{E}_p \cdot \vec{n}) \vec{n} = E_p \sin(\theta_i) \vec{n}$$

De acordo com as condições fronteira devemos ter, na transição entre dois meios de índices de refração diferentes n_1 e n_2

$$\begin{aligned} \vec{E}_i^\parallel + \vec{E}_r^\parallel &= \vec{E}_\tau^\parallel & ; & \quad \vec{H}_i^\parallel + \vec{H}_r^\parallel = \vec{H}_\tau^\parallel \\ \vec{D}_i^\perp + \vec{D}_r^\perp &= \vec{D}_\tau^\perp & ; & \quad \vec{B}_i^\perp + \vec{B}_r^\perp = \vec{B}_\tau^\perp \end{aligned}$$

9.4.2 Onda Transverso-Magnética (TM) ou Onda-p

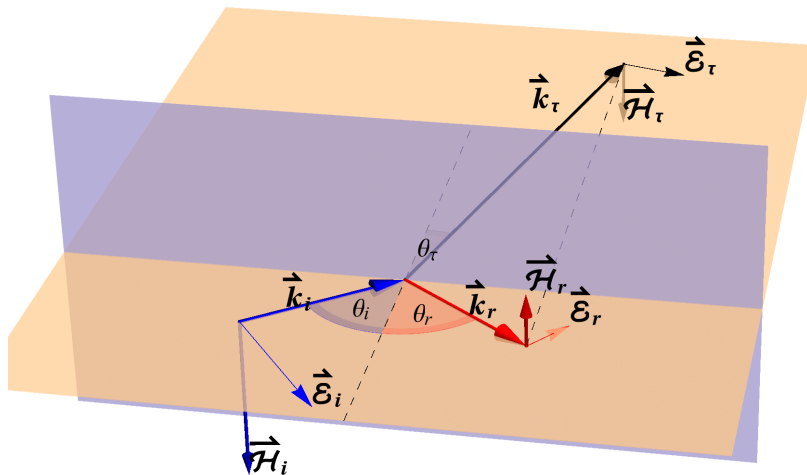


Figura 9.3: Onda TM tem o campo magnético perpendicular ao plano de incidência.

9.4.2.1 Coeficientes de Reflexão ρ_p e Transmissão τ_p .

Tendo em conta a continuidade das componentes paralelas de \vec{E}_p e das componentes normais de \vec{D}_p na passagem entre os dois meios, onde, designando por \vec{n} a normal à superfície de separação,

$$\vec{E}_{\parallel}^{(p)} = \vec{n} \times (\vec{E}^{(p)} \times \vec{n}) \quad ; \quad \vec{E}_{\perp}^{(p)} = (\vec{E}^{(p)} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad ; \quad \vec{D}_{\perp}^{(p)} = \varepsilon \vec{E}_{\perp}^{(p)}$$

obteríamos então as decomposições

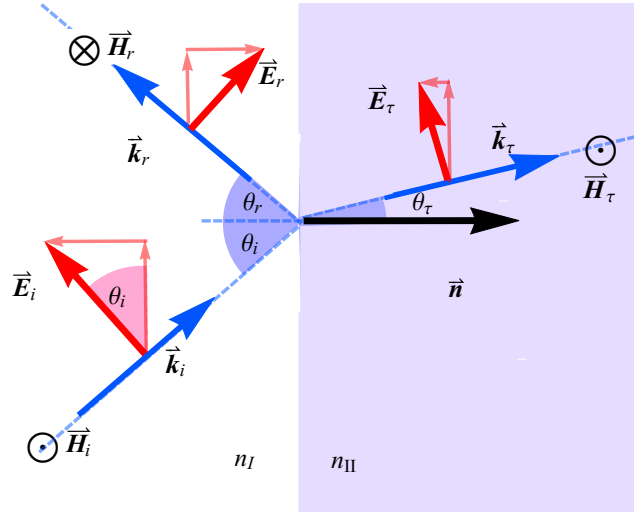


Figura 9.4: Onda-p ou TM (Transverso-Magnética) tem o campo elétrico paralela ao plano de incidência e o campo magnético paralelo à superfície de separação dos meios I e II .

$$\begin{cases} \vec{E}_i^{\parallel} + \vec{E}_r^{\parallel} = \vec{E}_\tau^{\parallel} \\ \varepsilon_1 (\vec{E}_i^{\perp} + \vec{E}_r^{\perp}) = \varepsilon_2 \vec{E}_\tau^{\perp} \end{cases} \implies \begin{cases} (E_i^{(p)} + E_r^{(p)}) \cos(\theta_i) = E_\tau^{(p)} \cos(\theta_\tau) \\ \varepsilon_1 (E_i^{(p)} - E_r^{(p)}) \sin(\theta_i) = \varepsilon_2 E_\tau^{(p)} \sin(\theta_\tau) \end{cases}$$

Fazendo $n_r = \frac{n_{II}}{n_I}$, das leis de Snell temos

$$\begin{cases} n_r = \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_\tau)} \\ \cos(\theta_\tau) = \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n_r^2}} \end{cases}$$

e definem-se **COEFICIENTES DE REFLEXÃO** $\rho_p = \frac{E_r^{(p)}}{E_i^{(p)}}$ e **DE TRANSMISSÃO** $\tau_p = \frac{E_\tau^{(p)}}{E_i^{(p)}}$

$$\rho_p = \frac{\mu_r \cos(\theta_\tau) - n_r \cos(\theta_i)}{\mu_r \cos(\theta_\tau) + n_r \cos(\theta_i)} \quad ; \quad \tau_p = \frac{2\mu_r \cos(\theta_i)}{\mu_r \cos(\theta_\tau) + n_r \cos(\theta_i)}$$

$$(E_i^{(p)} + E_r^{(p)}) \cos(\theta_i) = E_\tau^{(p)} \cos(\theta_\tau) \implies (1 + \rho_p) \cos(\theta_i) = \tau_p \cos(\theta_\tau)$$

$$H_i - H_r = H_\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \rho_p}{Z_I} = \frac{\tau_p}{Z_{II}}$$

Relembrando que $Z = \mu c$ e que $n_r = \mu_r \frac{Z_I}{Z_{II}}$

$$\rho_p = \frac{Z_{II} \cos(\theta_\tau) - Z_I \cos(\theta_i)}{Z_{II} \cos(\theta_\tau) + Z_I \cos(\theta_i)} \quad ; \quad \tau_p = \frac{2Z_{II} \cos(\theta_i)}{Z_{II} \cos(\theta_\tau) + Z_I \cos(\theta_i)}$$

9.4.2.2 Meios não-magnéticos.

No caso particular de $\mu_r = 1$ (i.e. para meios não-magnéticos) e substituindo $n_r = \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_\tau)}$ na expressão,

$$\rho_p = -\frac{\tan(\theta_i - \theta_\tau)}{\tan(\theta_i + \theta_\tau)} \quad ; \quad \tau_p = \frac{2 \cos(\theta_i) \sin(\theta_\tau)}{\cos(\theta_i - \theta_\tau) \sin(\theta_i + \theta_\tau)}$$

9.4.2.3 Refletância R e Transmitância T

Numa onda transverso-magnética (TM) o campo elétrico é paralelo ao plano de incidência, enquanto o campo magnético lhe fica perpendicular. Tendo em conta as relações anteriormente derivadas para os valores de E_{p_r} e E_{p_τ} em função de E_{p_i} , e a partir da definição de intensidade de uma onda

$$\mathcal{I}_i = \langle \vec{S}_i \cdot \vec{n} \rangle = \frac{1}{2Z_I} E_i^{(p)2} \cos(\theta_i)$$

$$\mathcal{I}_r = \langle \vec{S}_r \cdot \vec{n} \rangle = \frac{1}{2Z_I} E_r^{(p)2} \cos(\theta_i)$$

$$\mathcal{I}_\tau = \langle \vec{S}_\tau \cdot \vec{n} \rangle = \frac{1}{2Z_{II}} E_\tau^{(p)2} \cos(\theta_\tau)$$

então obtemos as seguintes relações para a razão de intensidades refletida e transmitida

$$R = \frac{\mathcal{I}_r}{\mathcal{I}_i} = \frac{(\mu_r \cos(\theta_\tau) - n_r \cos(\theta_i))^2}{(\mu_r \cos(\theta_\tau) + n_r \cos(\theta_i))^2} = \rho_p^2$$

$$T = \frac{\mathcal{I}_\tau}{\mathcal{I}_i} = \frac{4\mu_r n_r \cos(\theta_i) \cos(\theta_\tau)}{(\mu_r \cos(\theta_\tau) + n_r \cos(\theta_i))^2} = n_r \frac{\cos(\theta_\tau)}{\cos(\theta_i)} \tau_p^2$$

Note que $R + T = 1$.

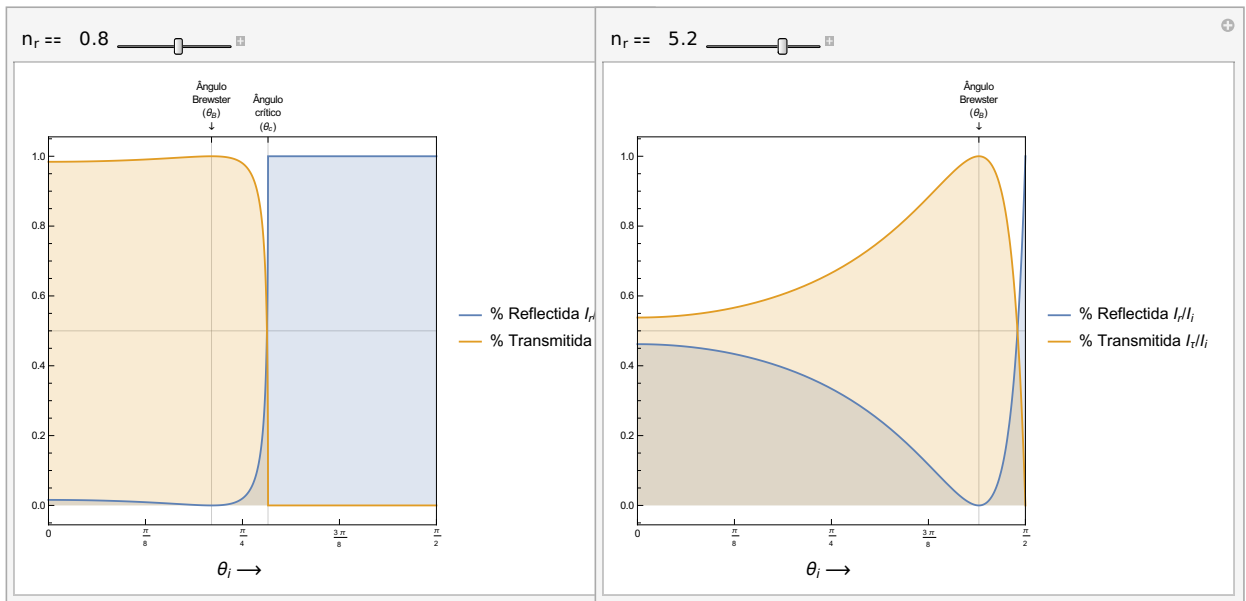


Figura 9.5: Refletância (R) e Transmitância (T) para uma onda-p ou (TM). Note-se a existência dum ângulo de Brewster $\theta_B = \tan^{-1}(n_r)$ para além dum ângulo Crítico $\theta_c = \sin^{-1}(n_r)$, onde $n_r = \frac{n_{II}}{n_I}$.

9.4.3 Onda Transverso-Elétrica (TE) ou Onda-s

9.4.3.1 Coeficientes de Reflexão ρ_s e Transmissão τ_s .

No caso de uma onda incidente polarizada linearmente numa direção perpendicular ao plano de incidência \vec{n}_π , tanto \vec{E} como \vec{D} são paralelos ao plano de interface entre meios \vec{n}_{12} , ou seja

$$\begin{cases} \vec{E}_{i\parallel}^{(s)} + \vec{E}_{r\parallel}^{(s)} = \vec{E}_{\tau\parallel}^{(s)} \\ \vec{E}_{i\perp}^{(s)} = \vec{E}_{r\perp}^{(s)} = \vec{E}_{\tau\perp}^{(s)} = 0 \end{cases}$$

As condições fronteira aplicam-se agora aos campos magnéticos \vec{B} e \vec{H} , que se encontram linearmente polarizados paralelamente ao plano de incidência.

$$\begin{cases} \vec{H}_{i\parallel}^{(s)} + \vec{H}_{r\parallel}^{(s)} = \vec{H}_{\tau\parallel}^{(s)} \\ \vec{B}_{i\perp}^{(s)} + \vec{B}_{r\perp}^{(s)} = \vec{B}_{\tau\perp}^{(s)} \end{cases} \implies \begin{cases} (H_i^{(s)} \pm H_r^{(s)}) \cos(\theta_i) = H_\tau^{(s)} \cos(\theta_\tau) \\ \mu_1 (H_i^{(s)} \mp H_r^{(s)}) \sin(\theta_i) = \mu_2 H_\tau^{(s)} \sin(\theta_\tau) \end{cases}$$

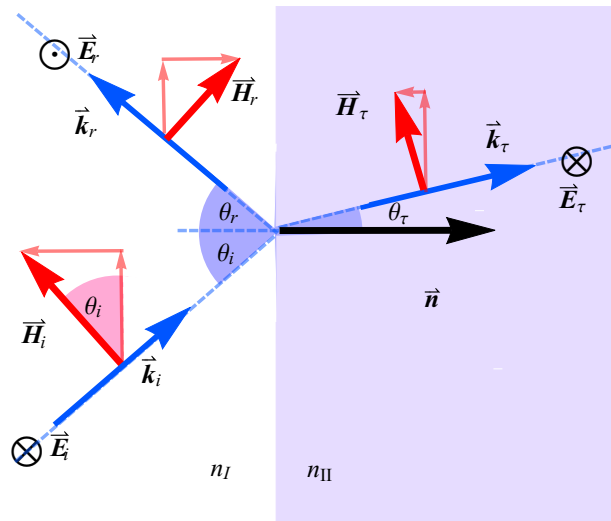


Figura 9.6: Onda-s ou TE (Transverso-Elétrica) tem o campo magnético paralelo ao plano de incidência, e o campo elétrico perpendicular ao plano de incidência e paralelo à superfície de separação dos meios I e II .

Das equações de Maxwell deduz-se a relação entre \vec{H} e \vec{E} para ondas planas

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{E} \quad \Rightarrow \quad |\vec{H}| = H = \frac{1}{Z} E$$

Devemos assim ter $H^{(s)} = \frac{1}{Z} E^{(s)}$ para ondas-s, pelo que os coeficientes de reflexão e transmissão devem ser neste caso

$$\begin{aligned} E_i^{(s)} - E_r^{(s)} &= E_\tau^{(s)} & \Rightarrow & \quad 1 - \rho_s = \tau_s \\ (H_i^{(s)} + H_r^{(s)}) \cos(\theta_i) &= H_\tau^{(s)} \cos(\theta_\tau) & \Rightarrow & \quad (1 + \rho_s) \frac{\cos(\theta_i)}{Z_I} = \tau_s \frac{\cos(\theta_\tau)}{Z_{II}} \end{aligned} \tag{9.1}$$

$$\rho_s = -\frac{Z_{II} \cos(\theta_i) - Z_I \cos(\theta_\tau)}{Z_{II} \cos(\theta_i) + Z_I \cos(\theta_\tau)} \quad ; \quad \tau_s = \frac{2Z_{II} \cos(\theta_i)}{Z_{II} \cos(\theta_i) + Z_I \cos(\theta_\tau)}$$

Obtemos assim

$$H_r^{(s)} = -\frac{n_r \cos(\theta_\tau) - \mu_r \cos(\theta_i)}{n_r \cos(\theta_\tau) + \mu_r \cos(\theta_i)} H_i^{(s)} \quad ; \quad H_\tau^{(s)} = \frac{2n_r \cos(\theta_i)}{n_r \cos(\theta_\tau) + \mu_r \cos(\theta_i)} H_i^{(s)}$$

$$\rho_s = -\frac{n_r \cos(\theta_\tau) - \mu_r \cos(\theta_i)}{n_r \cos(\theta_\tau) + \mu_r \cos(\theta_i)} \quad ; \quad \tau_s = \frac{Z_{II}}{Z_I} \frac{2n_r \cos(\theta_i)}{n_r \cos(\theta_\tau) + \mu_r \cos(\theta_i)}$$

9.4.3.2 Meios não-magnéticos.

No caso particular de $\mu_r = 1$ (i.e. para meios não-magnéticos) e substituindo $n_r = \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_r)}$ na expressão, tem-se $\frac{Z_{II}}{Z_I} = \frac{1}{n_r}$ e podem-se definir coeficientes de transmissão $\tau_s = \frac{E_r}{E_i}$ e reflexão $\rho_s = \frac{E_r}{E_i}$

$$\rho_s = \frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \quad ; \quad \tau_s = \frac{2 \cos(\theta_i) \sin(\theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)}$$

9.4.3.3 Refletância R e Transmitância T .

Numa onda transverso-elétrica (TE) o campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência, enquanto o campo magnético lhe fica paralelo. Tendo em conta as relações anteriormente derivadas para os valores de $E_r^{(s)}$ e $E_\tau^{(s)}$ em função de $E_i^{(s)}$, e a partir da definição de intensidade de uma onda

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{(n_r \cos(\theta_r) - \cos(\theta_i) \mu_r)^2}{(n_r \cos(\theta_r) + \cos(\theta_i) \mu_r)^2} = \rho_s^2$$

$$T = \frac{I_\tau}{I_i} = \frac{4n_r \cos(\theta_i) \cos(\theta_r) \mu_r}{(n_r \cos(\theta_r) + \cos(\theta_i) \mu_r)^2} = n_r \frac{\cos(\theta_r)}{\cos(\theta_i)} \tau_s^2$$

Note que $R + T = 1$

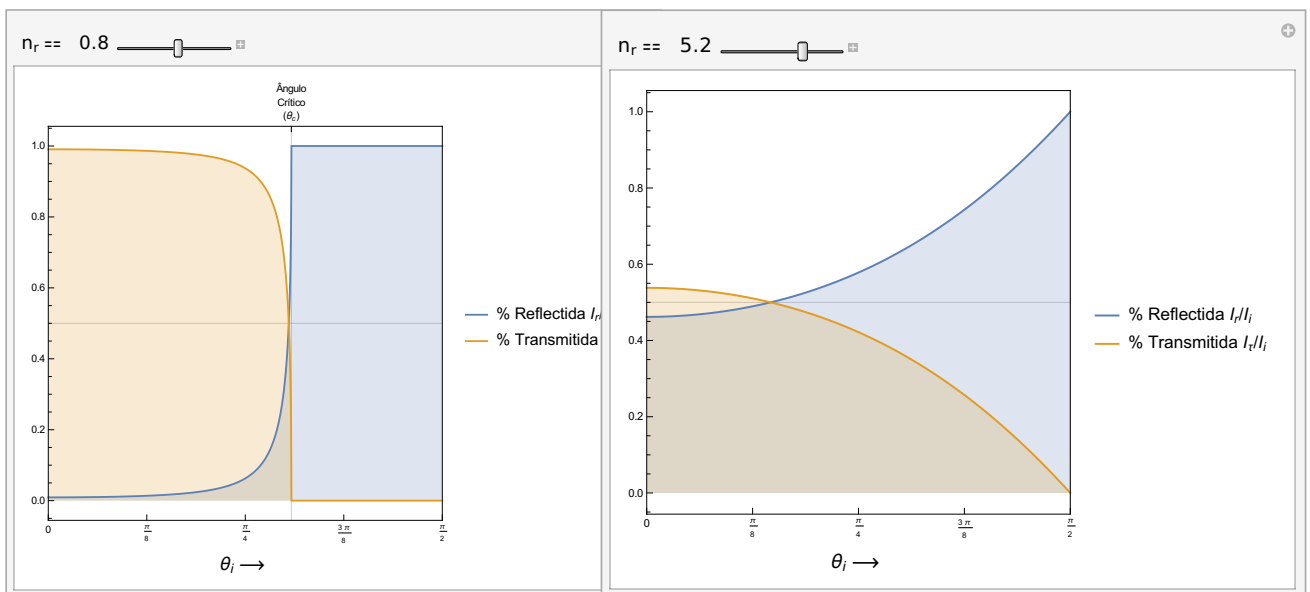


Figura 9.7: Refletância (R) e Transmitância (T) para uma onda-s ou (TE). Note-se a existência dum ângulo Crítico $\theta_c = \sin^{-1}(n_r)$ quando $n_r < 1$, onde $n_r = \frac{n_{II}}{n_I}$, e a ausência dum ângulo de Brewster $\theta_B = \tan^{-1}(n_r)$.

9.5 Alteração de fase na reflexão

Uma onda eletromagnética sofre uma **inversão de fase** quando refletida na superfície de um meio com um índice de refração **maior** que o do meio da onda incidente ($n_2 < n_1 \iff \theta_i > \theta_r$).

Quando a onda incidente se reflete na superfície de separação com um meio de índice de refração **menor** que o da onda incidente ($n_1 > n_2 \iff \theta_i < \theta_r$) **não há inversão de fase** na reflexão.

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_p &= \frac{E_r^{(p)}}{E_i^{(p)}} = \frac{n_1 \cos(\theta_r) - n_2 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_r) + n_2 \cos(\theta_i)} = -\frac{\tan(\theta_i - \theta_r)}{\tan(\theta_i + \theta_r)} \\ \rho_s &= \frac{E_r^{(s)}}{E_i^{(s)}} = \frac{n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_r)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_r)} = \frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \end{aligned} \right. \implies \text{Incid. Normal: } \rho_p = \rho_s = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (\theta_i = \theta_r = 0)$$

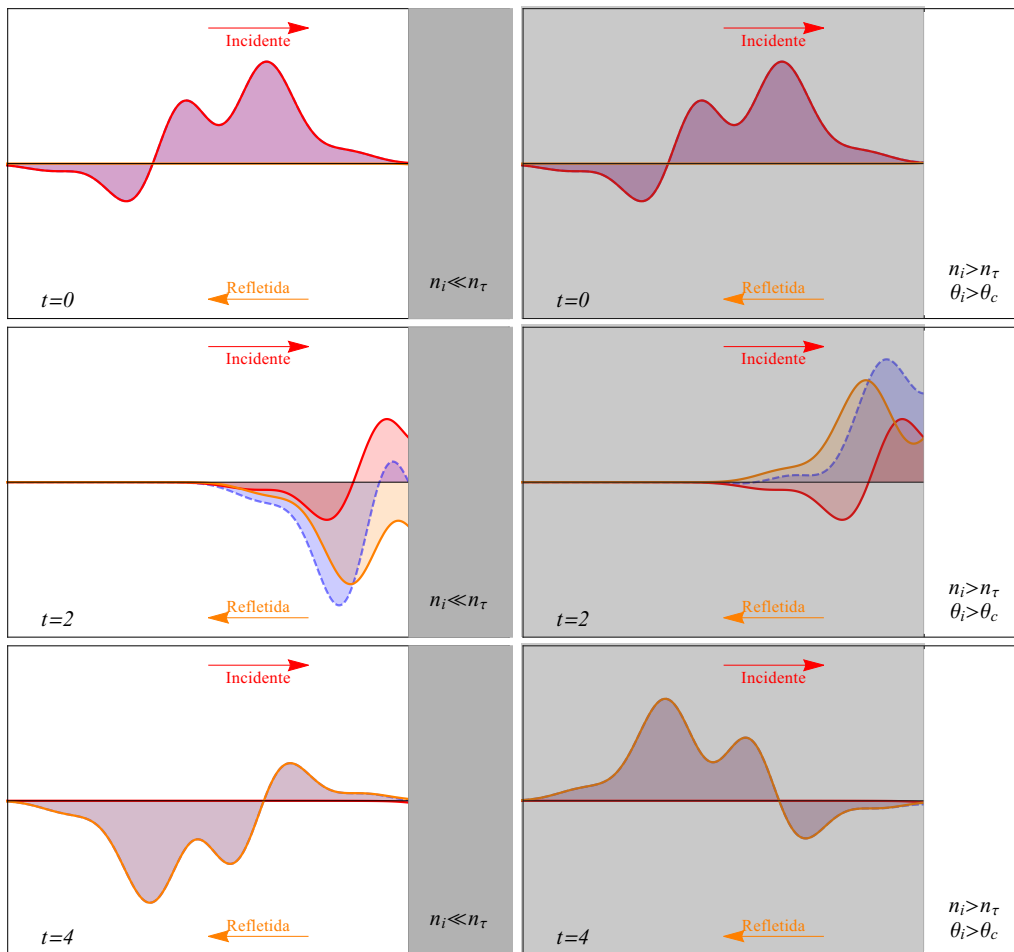


Figura 9.8: Uma solução $f(x - v t)$ da equação de ondas comporta-se de maneira diferente quando é refletida numa interface com um meio de índice de refração maior (esquerda) ou menor (direita) que o do meio onde a onda se propaga. Para uma onda-p eletromagnética (TM) isto significa a inversão (esquerda), ou a invariância (direita), do sinal do campo elétrico refletido relativamente ao do campo elétrico incidente.

9.6 Interferência de duas ondas: Experiência de Young

Quando a distância d entre as fontes é pequena comparada à distância ao ecrã $L \gg d$, a diferença entre as distâncias r_1 e r_2 é aproximada por

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d \sin(\theta)$$

Se as ondas estão em fase à saída das fendas S_1 e S_2 , a segunda fica desfasada de

$$k\delta = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

em relação à primeira ao percorrer a distância $x = \delta$. A partir daí a diferença de fase mantém-se constante até chegar ao ponto P porque as distâncias percorridas r_1 e $r_2 - \delta$ são iguais. Assim se

$$\delta = m\lambda \quad \Rightarrow \quad k\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Rightarrow \quad k\delta = 2\pi m + \pi$$

Nestas condições as ondas chegam a P **em fase** ou em **oposição de fase** se

$$\sin(\omega t - k r_1) = \sin(\omega t - k(r_2 - \delta_+)) = \sin(\omega t - k r_2)$$

$$\sin(\omega t - k r_1) = \sin(\omega t - k(r_2 - \delta_-)) = -\sin(\omega t - k r_2)$$

Como $y = L \tan(\theta)$ podemos obter

$$\sin(\theta) = \frac{y}{L} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{L}\right)^2}}$$

Para $y \ll L$ obtemos as posições das riscas claras e escuras no ecrã. Relembrando que $\delta = d \sin(\theta)$

$$\begin{cases} k(r_2 - \delta_+) = k r_2 - 2\pi m & (\text{max}) \\ k(r_2 - \delta_-) = k r_2 - (2\pi m + \pi) & (\text{min}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta_+ = d \sin(\theta) = \frac{2\pi}{k} m \\ \delta_- = d \sin(\theta) = \frac{2\pi}{k} \left(m + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_+ = L \tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right)\right) \approx L \frac{m\lambda}{d} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2\right) \\ y_- = L \tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\lambda}{d}\right)\right) \approx L \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda}{d} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{(m+\frac{1}{2})\lambda}{d}\right)^2\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_+ \approx L \frac{m\lambda}{d} & (\text{max}) \\ y_- \approx L \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda}{d} & (\text{min}) \end{cases}$$

para $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, enquanto $\frac{m\lambda}{d} \ll 1$.

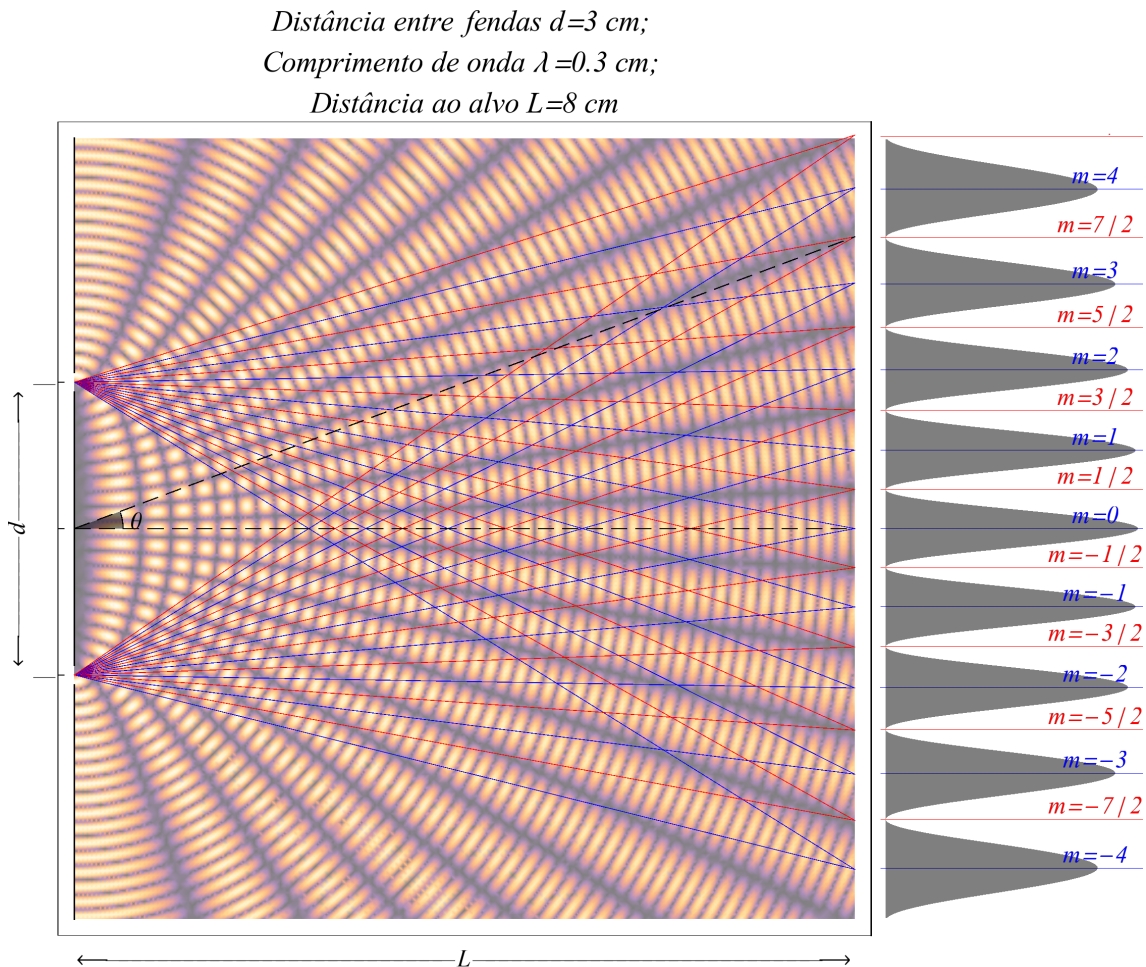


Figura 9.9: Experiência de Young

A experiência de Young pode ser reproduzida com um espelho e uma fonte pontual de luz tal que $\lambda \ll d$. A separação das fontes corresponde agora à da imagem real e da sua reflexão no espelho.

9.6.1 Intensidade das riscas de interferência

A sobreposição em P das ondas desfasadas de $k\delta = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ significa que o campo elétrico aí teria uma magnitude

$$|\vec{E}(\vec{r}_P, t)| = E_o (\sin[\omega t - kr_1] + \sin[\omega t - k(r_1 + \delta)])$$

Tendo em conta que

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

obtemos

$$|\vec{E}(\vec{r}_P, t)| = 2E_o \cos\left(\frac{k\delta}{2}\right) \sin\left(\omega t - kr_1 - \frac{k\delta}{2}\right)$$

A intensidade de uma onda magnética é proporcional ao quadrado da magnitude do seu campo elétrico, ou seja

$$I_P = \frac{1}{Z_o} \langle |\vec{E}(\vec{r}_P, t)|^2 \rangle = \frac{1}{Z_o} 4E_o^2 \cos^2\left(\frac{k\delta}{2}\right) \langle \sin^2\left(\omega t - kr_1 - \frac{k\delta}{2}\right) \rangle$$

A média temporal do quadrado do seno dá um fator de $\frac{1}{2}$ e a amplitude máxima do campo elétrico deve ser $2E_o$ pelo que

$$I_P = I_{\max} \cos\left(\frac{k\delta}{2}\right)^2 = I_{\max} \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\theta)\right)^2 \approx I_{\max} \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda L} y\right)^2$$

9.7 Redes de difração

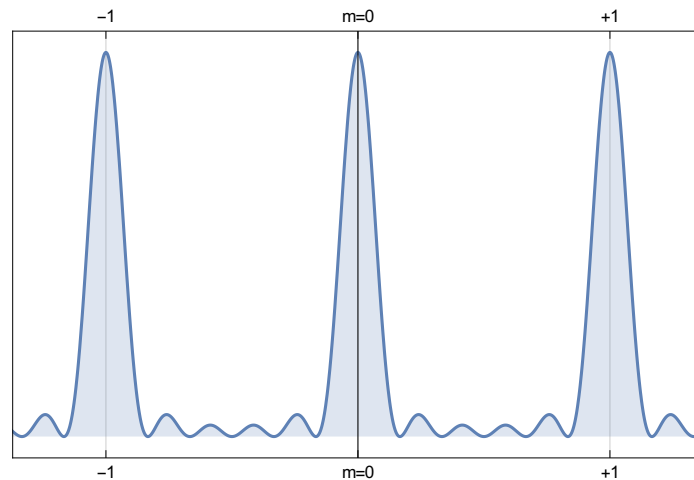
Numa rede de difração com N fendas, com separação d entre fendas, continua a ter-se a relação para os máximos

$$d \sin(\theta_m) = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Tendo isto em conta, a **largura angular** $\Delta\theta_o(m)$ dos máximos pode ser calculada como o desvio da direção θ_m do máximo tal que

$$d \sin(\theta_m + \Delta\theta_o) = d \sin(\theta_m) + \Delta \ell_{\min} \quad \Rightarrow \quad d \sin(\theta_m) + d \cos(\theta_m) \Delta\theta_o + \dots = d \sin(\theta_m) + \frac{\lambda}{N}$$

$$\Delta\theta_o = \frac{\lambda}{Nd \cos(\theta_m)}$$



Isto acontece porque se

$$\alpha = \Delta\phi_{\max} = kd \sin(\theta_m) = 2\pi m$$

então todos os termos da soma $\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\alpha}$ (fator na soma dos campo elétricos de cada fenda com diferenças de fase sucessivas $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, n\alpha, \dots, (N-1)\alpha$) são da forma $e^{in\alpha} = e^{i2\pi mn} = 1$ qualquer que seja n inteiro,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\alpha} = N$$

ou seja a soma tem o valor máximo possível.

Para $N = 2$ a condição de mínimo era $\Delta\phi = \pi = 2\pi/2$, mas para N fendas seria

$$\Delta\phi_{\min} = \frac{2\pi}{N}$$

para cada um dos $\frac{N}{2}$ pares consecutivos de fendas, contribuindo assim no total para um desfasamento de $\frac{N}{2}\Delta\phi_{\min} = \pi$ num mesmo mínimo.

O aumento de fase $\Delta\phi$ para cada par de fendas adjacentes seria correspondente a um aumento de trajeto $\Delta\ell$

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\Delta\ell}{\lambda}$$

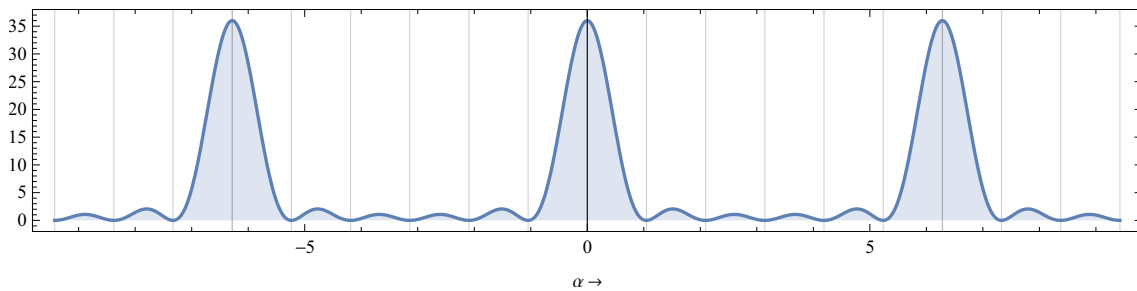
ou seja na condição de mínimo

$$\Delta\ell_{\min} = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\phi_{\min} = \frac{\lambda}{N}$$

Para os **mínimos** procura-se os valores da fase α para os quais se anula a soma

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\alpha} = \frac{1 - e^{iN\alpha}}{1 - e^{i\alpha}}$$

A função $\left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\alpha} \right|^2 = \left| \frac{1 - e^{iN\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \right|^2$ para $N=6$



Para $N > 1$ fendas a primeira condição de mínimo é

$$\alpha = \Delta\phi_{\min} = \frac{2\pi}{N} \implies \frac{1 - e^{iN\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = 0$$

O aumento de fase $\Delta\phi$ para cada par de fendas adjacentes será correspondente a um aumento de trajeto δ e na condição de mínimo

$$\Delta\phi_{\min} = k\delta_{\min} \implies \delta_{\min} = \frac{\Delta\phi_{\min}}{k} = \frac{2\pi/N}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{N}$$

Tendo isto em conta, a **largura angular** $\Delta\theta_o(m)$ dos máximos pode ser calculada como o desvio da direção θ_m do máximo m tal que a diferença de percurso do máximo de ordem m para o mínimo adjacente é

$$d \sin(\theta_m + \Delta\theta_o) = d \sin(\theta_m) + \delta_{\min} \implies d \sin(\theta_m) + d \cos(\theta_m)\Delta\theta_o + \dots = d \sin(\theta_m) + \frac{\lambda}{N}$$

$$\Delta\theta_o(m) = \frac{\lambda}{Nd \cos(\theta_m)}$$

Quando λ é variável, como é que se alteram as posições dos máximos?

Dispersão D de uma rede de difração

$$\frac{d \sin(\theta_m)}{d\lambda} = \cos(\theta_m) \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{d} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\Delta\theta_m}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos(\theta_m)}$$

Para conseguirmos separar duas riscas correspondentes ao mesmo máximo de ordem m é necessário que o ângulo $\Delta\theta_m$ seja da ordem de grandeza da largura das riscas, ou seja, o **poder de resolução** R de riscas de ordem m duma rede de difração com N fendas é

$$\frac{\Delta\theta_m}{\Delta\theta_o} = Nm \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

9.8 Critério de Rayleigh

Para poder separar duas fontes pontuais vistas através de uma fenda, os máximos das ondas difratadas não se podem sobrepor demais. O mínimo exigido (Critério de Rayleigh) é que o máximo de uma coincida com o primeiro mínimo da outra, ou seja a separação entre os máximos principais deve ser em termos angulares

$$\Delta\theta_{\min} = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

É esse o caso da figura seguinte

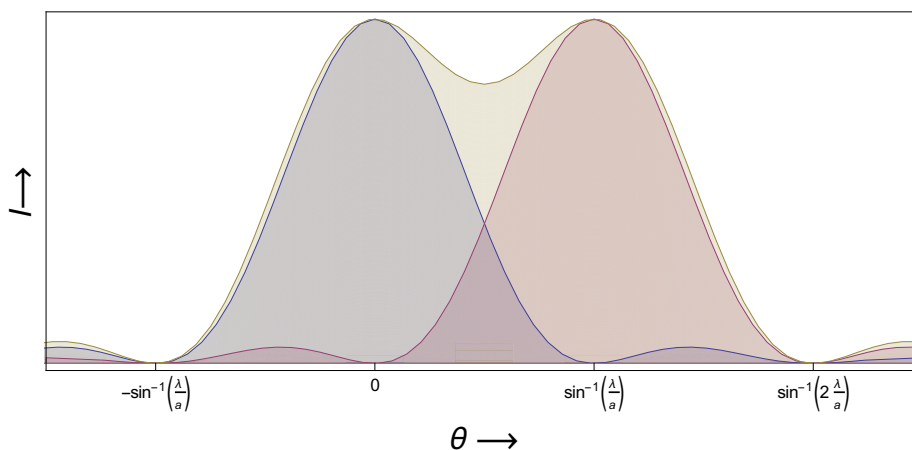


Figura 3

Quando $\Delta\theta_{\min} < \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ as ondas difratadas somam-se de forma a não evidenciar a existência de dois máximos.

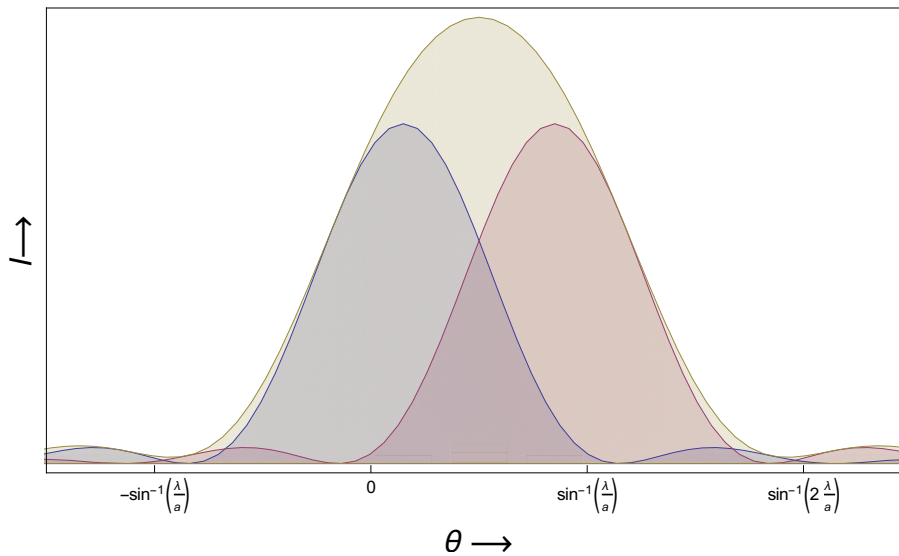


Figura 4

9.9 Princípio de Huygens (1660)

Todos os pontos de uma onda podem ser tomados como fontes pontuais que emitem ondas secundárias, que se propagam esféricamente através de um meio à velocidade característica desse meio. Após um intervalo de tempo a posição da frente de onda é a superfície tangente a essas ondas secundárias.

No caso da difração, quando a largura da fenda por onde passa uma onda é da ordem de grandeza do comprimento de onda $a \geq \lambda$, então a onda que resulta pode ser considerada como a sobreposição de um número teoricamente infinito de ondas geradas por cada ponto dentro da fenda que se encontra à mesma fase.

9.10 Difração de Fraunhofer

Quando o alvo se encontra longe da fenda¹, os raios que chegam a cada região do alvo são aproximadamente paralelos, e o padrão de intensidade luminosa que se obtém designa-se de Fraunhofer. Na difração de Fraunhofer a radiação incidente na fenda é uma onda plana, e a radiação difratada também (por exemplo porque a fonte e o alvo estão muito longe da fenda), enquanto que na de Fresnel as ondas incidente e difratada são esféricas ou cilíndricas junto à fenda e ao alvo. Daí que a difração de Fraunhofer tenha um tratamento matemático muito mais simples que a de Fresnel, tornando-a ideal em aplicações e design de aparelhos óticos. Vamos então assumir que todos os pontos da fenda da figura seguinte estão em fase, ou seja a onda incidente na abertura é plana e o vetor de onda incidente é perpendicular ao plano da fenda. No caso de uma onda plana incidindo noutra direção o raciocínio a efetuar e o padrão obtido são semelhantes, mas centrados na direção do vetor de onda.

No diagrama seguinte cada ponto da fenda age como uma fonte de acordo com o princípio de Huygens. Se a distância $\delta = \frac{a}{2} \sin(\theta)$ corresponde a $\delta = \pm \lambda/2$ então o desfasamento entre as ondas é de

$$k\delta = \pm \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pm \pi$$

¹ A razão $F = \frac{a^2}{\lambda d}$, onde a é o tamanho característico da abertura ou fenda, d a distância ao alvo e λ o comprimento de onda da radiação, designa-se **número de Fresnel**. Quando $F \ll 1$ a difração designa-se de Fraunhofer, enquanto se $F \geq 1$ designa-se difração de Fresnel. Para outros valores é necessário usar a teoria escalar de difração.

ou seja existe cancelamento das ondas a partir daí e também no ecrã. Dividindo a fenda em mais intervalos obtemos condições de anulamento semelhantes levando à condição de cancelamento

$$\delta_{2N} = \frac{a}{2N} \sin(\theta) = \pm \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad k\delta_{2N} = \pm\pi \therefore \sin(\theta) = N \frac{\lambda}{a} (N = 1, 2, 3, \dots)$$

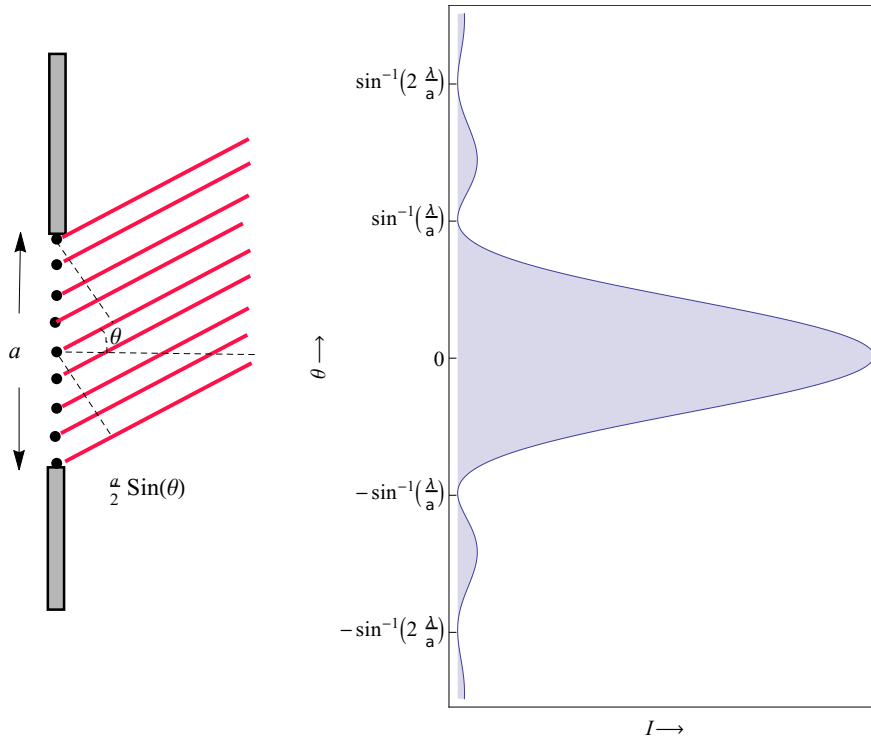


Figura 9.10: Difração de Fraunhofer. A fenda do lado esquerdo tem abertura a e está a grande distância d do alvo. A intensidade no alvo é representada pela figura do lado direito, onde os mínimos representam intensidade zero. As ondas incidente e difratada são planas e monocromáticas de comprimento de onda $\lambda < a$.

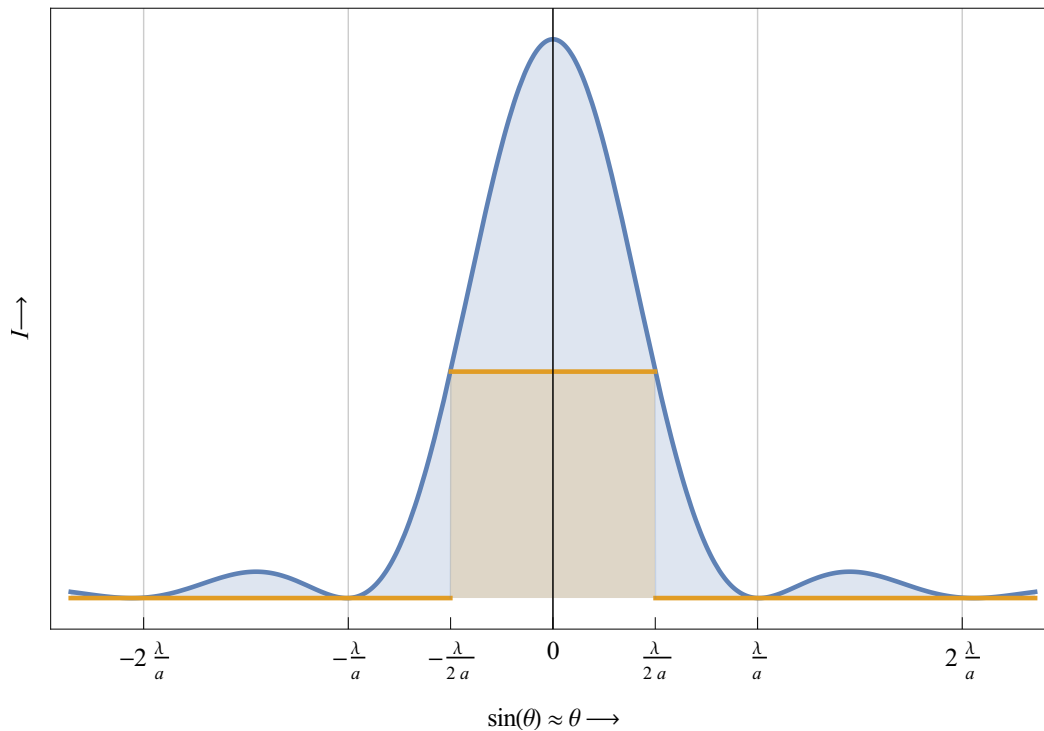
Intensidade do padrão de difração.

Pondo $\delta = a \sin(\theta)$, o valor médio da soma dos campos para $2N$ fontes sucessivas contribuindo com um desfaseamento $\frac{k\delta}{2N}$ cada, obtemos (usando no limite $N \rightarrow \infty$ a correspondência $\frac{n}{2N} \rightarrow \xi$, com $\frac{1}{2N} \rightarrow d\xi$ para transformar a soma num integral)

$$\vec{E}_\theta = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2N} \frac{\vec{E}_o}{2N} e^{in \frac{k\delta}{2N}} \quad \rightarrow \quad \vec{E}_\theta = \vec{E}_o \int_0^1 e^{i\xi k\delta} d\xi = \vec{E}_o e^{i \frac{k\delta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{k\delta}{2}\right)}{\frac{k\delta}{2}}$$

A intensidade é proporcional a $|\vec{E}_\theta|^2$ e tem o valor máximo $I_o = \frac{1}{2Z_o} |\vec{E}_o|^2$ para $\theta = 0$. Quando $\lambda \ll a$ e para $\theta \approx o\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

$$I(\theta) = \frac{1}{2Z_o} |\vec{E}_o|^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{k\delta}{2}\right)}{\frac{k\delta}{2}} \right)^2 \approx I_o \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)^2$$



A imagem correspondente no caso de difração de Fresnel é semelhante a esta com a diferença de que os mínimos não correspondem a pontos de intensidade nula, pelo que o contraste claro/escuro é muito menos definido do que na difração de Fraunhofer.

Problema: Satélite espião

Qual é a resolução espacial de um satélite espião que se encontra em órbita a $h = 100\text{Km}$ da superfície da Terra, sabendo que tem uma lente com um diâmetro de $a = 1\text{m}$? (considere que o comprimento de onda detetado é da ordem de $\lambda = 0.45\mu\text{m}$)

A separação da imagem de dois pontos obedece ao critério de Rayleigh, e deve assim subtender o ângulo $\Delta\theta_R$.

$$\Delta\theta_R = 1.2 \frac{\lambda}{a} = 1.2 \times \frac{0.45 \times 10^{-6}}{1} = 5.4 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

$$r = h\Delta\theta_R = 100 \times 10^3 \times 5.4 \times 10^{-7} = 5.4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

9.10.1 Lei de Bragg

Interferência construtiva devida a reflexão de raios-X em planos cristalinos de separação d (diferença de caminhos óticos)

$$k 2d \sin(\theta_m) = 2m \pi \quad \Rightarrow \quad 2d \sin(\theta_m) = m\lambda$$



Ótica Geométrica

10	Espelhos, Lentes e Ótica Geométrica	283
10.1	Espelhos	
10.2	Lentes	
10.3	Telescópio Galileano	
10.4	Telescópio Newtoniano	
10.5	Abertura circular	



10. Espelhos, Lentes e Ótica Geométrica

Conteúdo

10.1	Espelhos	283
10.1.1	Espelhos planos	284
10.1.2	Espelhos esféricos	285
10.1.3	Magnificação	287
10.1.4	Espelho convexo	288
10.2	Lentes	289
10.2.1	A fórmula da lente esférica	289
10.2.2	Interfaces planas	290
10.2.3	Distância focal	291
10.2.4	Equação das lentes finas	292
10.2.5	Formação de imagens	294
10.2.6	Magnificação lateral e Magnificação angular numa lente	295
10.2.7	Magnificação angular num Microscópio	296
10.2.8	Magnificação angular dum telescópio	296
10.3	Telescópio Galileano	297
10.4	Telescópio Newtoniano	297
10.5	Abertura circular	298

10.1 Espelhos

- Estudo das imagens formadas por espelhos planos. Imagem real e imagem virtual. Ampliação (M) da imagem.

- Imagens formadas por espelhos esféricos: côncavos e convexos. Centro de curvatura, distância focal e equação dos espelhos.
- Diagramas de raios: aplicação a um espelho côncavo.

10.1.1 Espelhos planos

No caso de espelhos planos as imagens de objetos à distância u da sua superfície forma-se pela intersecção de prolongamentos das reflexões de dois quaisquer raios originários do mesmo ponto do objeto

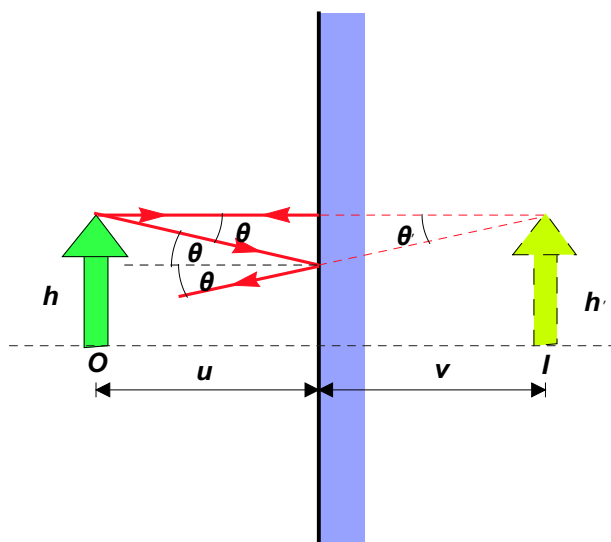


Figura 8

Uma vez que os ângulos de incidência e reflexão são iguais e portanto dois raios refletidos do mesmo ponto divergem, as imagens formadas são sempre virtuais ($v < 0$) ou seja formam-se do lado de trás do espelho.

Dado que os triângulos assim formados são isósceles, já que os ângulos $\theta = \theta'$, deve ter-se $u = -v$, ou seja

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 0$$

Por outro lado, é evidente que $h = h'$, pelo que a magnificação de um espelho plano é

$$M = \frac{h'}{h} = 1$$

Deve igualmente ser evidente que a imagem I é a fonte aparente do reflexo do objeto visto no espelho por qualquer observador em qualquer posição P .

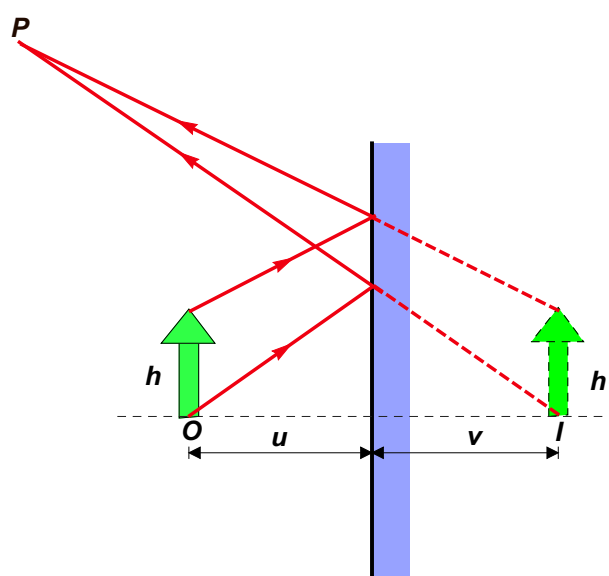


Figura 9

10.1.2 Espelhos esféricos

Num espelho esférico, o raio de curvatura é positivo se for concavo ($R > 0$), negativo se convexo ($R < 0$).

Para objectos perto do espelho à distância $u < \infty$, a imagem real formada pela intersecção de raios luminosos refletidos do espelho forma-se a uma distância $v > 0$ do espelho e de acordo com a imagem seguinte fica invertida.

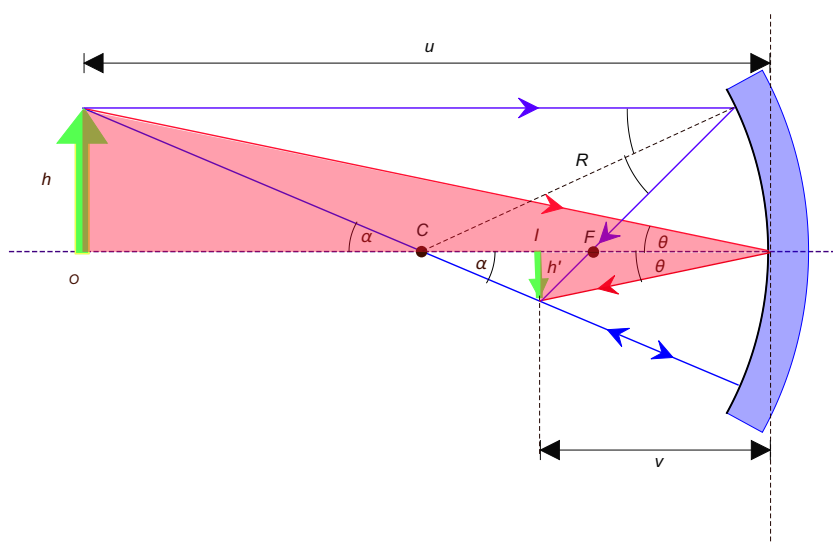


Figura 1

Nesta imagem, o ângulo θ de incidência dum raio luminoso no ponto de intersecção do eixo com o espelho verifica a identidade:

$$\tan(\theta) = \frac{h}{u} = -\frac{h'}{v}$$

onde $h' < 0$ representa a altura da imagem real formada à distância v do espelho.

Para o ângulo α do raio luminoso que passa pelo centro do espelho, e portanto é normal à sua superfície (coincide com o raio refletido) obtém-se de forma análoga a identidade:

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{u-R} = -\frac{h'}{R-v} \quad \Rightarrow \quad \frac{h'}{h} = -\frac{R-v}{u-R} = -\frac{v}{u}$$

Esta última equação pode ser resolvida para se obter

$$R = \frac{2uv}{u+v}$$

Dividindo por 2 e invertendo obtém-se daqui a **Equação dos Espelhos**

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{R}$$

Para imagens muito distantes $v = \frac{R}{2}$ tem-se $v = \frac{R}{2}$, ficando assim definido o **foco** e a **distância focal**

$$f = \frac{R}{2}$$

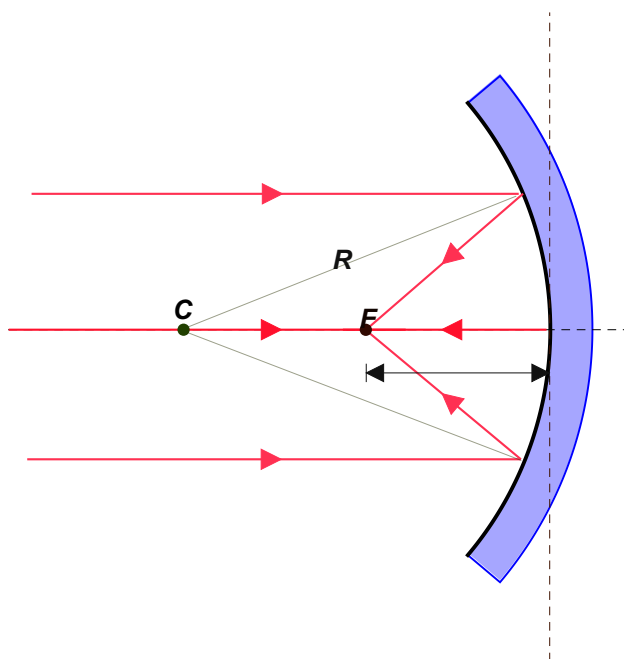


Figura 2

10.1.2.1 Equação dos Espelhos

Em termos da distância focal $f = \frac{R}{2}$ a equação dos espelhos fica

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

10.1.3 Magnificação

A **magnificação** dum espelho determina o tamanho h' da imagem observada em função do tamanho real h do objeto

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{v}{u}$$

Quando a magnificação M é

Positiva	⇒	imagem direita
Negativa	⇒	imagem invertida
Maior que 1	⇒	imagem aumentada
Menor que 1	⇒	imagem reduzida
Igual a 1	⇒	Imagem do mesmo tamanho

10.1.3.1 Formação de imagem: Imagens Reais e Virtuais

Visto de P o objeto em O de altura h parece invertido com altura h' e localizado em I . A imagem em I é real, ou seja é o resultado de raios luminosos convergentes e por isso é projectável num alvo.

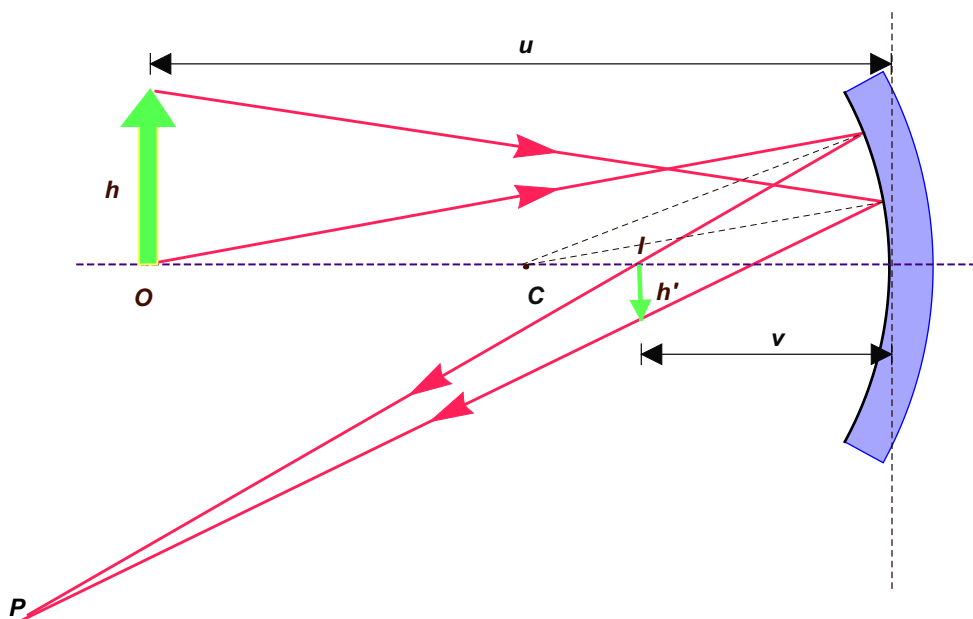


Figura 3

Imagens reais são formadas pela intersecção de raios luminosos refletidos no espelho e correspondem sempre a valores de $v > 0$. Estas imagens formam-se à frente do espelho e aparecem invertidas.

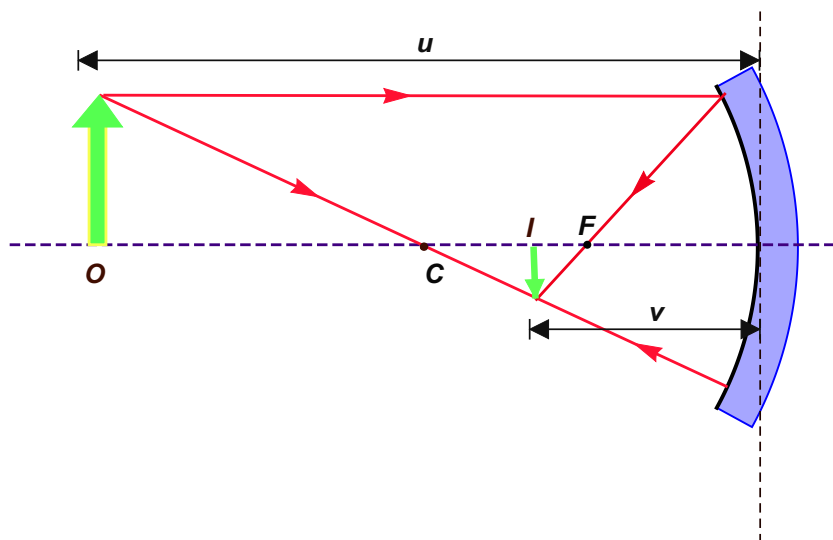


Figura 4

Imagens virtuais são imagens com $v < 0$ (i.e. formam-se atrás do espelho) e que não ficam invertidas. São formadas pelas intersecções de prolongamentos de raios luminosos refletidos no espelho.

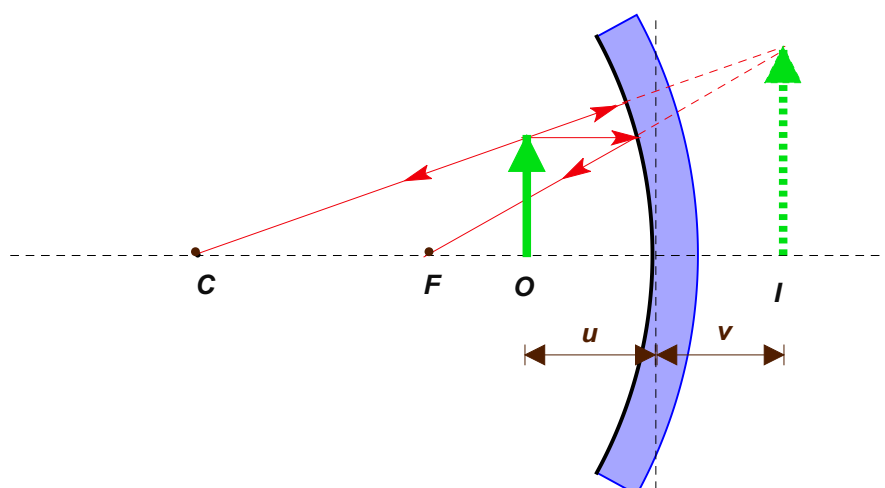


Figura 5

10.1.4 Espelho convexo

No caso de um espelho convexo, o raio de curvatura R e a distância focal f são ambos negativos. As imagens formadas são sempre imagens virtuais ($v < 0$).

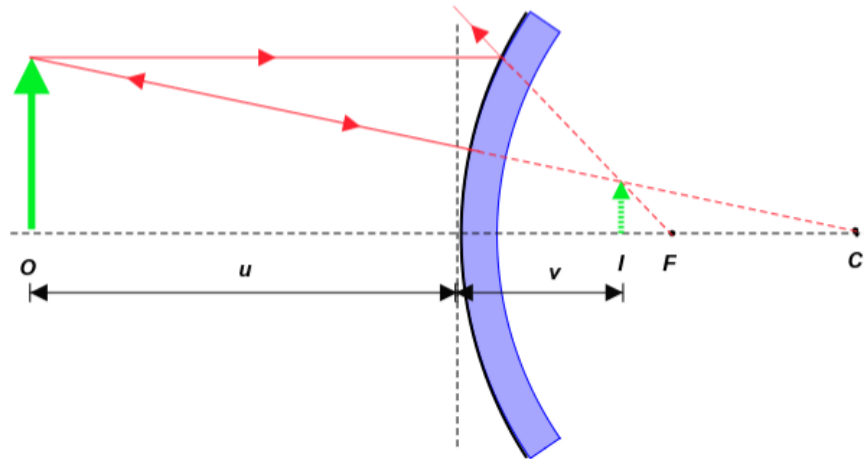


Figura 6

10.1.4.1 Problema: Espelho convexo

Se um espelho convexo, com distância focal $f = -0.25m$, mostra a imagem de um objeto localizado a $3m$ de distância, qual deve ser a posição da imagem e a sua magnificação M ?

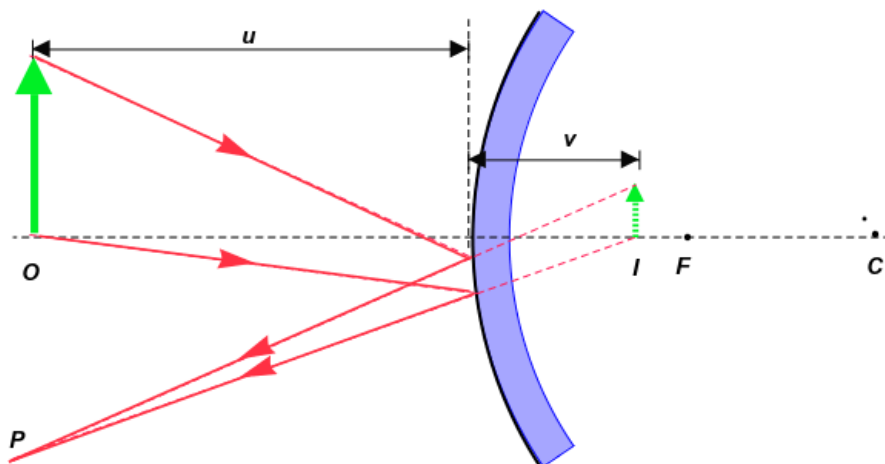


Figura 7

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{0.25} = -4$$

$$v = \frac{1}{-4 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{13} = -0.23m$$

$$M = -\frac{v}{u} = -\frac{1}{13} = 0.077$$

10.2 Lentes

10.2.1 A fórmula da lente esférica

Consideremos uma superfície de transição entre dois meios com índices de refração diferentes n_1 e n_2 .

Assumindo que esta superfície é convexa com raio de curvatura R , consideremos a relação entre a distância u de uma fonte de raio luminoso à superfície e a sua imagem no outro meio à distância v da superfície.

- Assumimos aqui a aproximação de raios paraxiais, i.e. todos os ângulos de incidência são suficientemente pequenos para que a aproximação $\sin(\theta) \approx \theta$ seja válida.

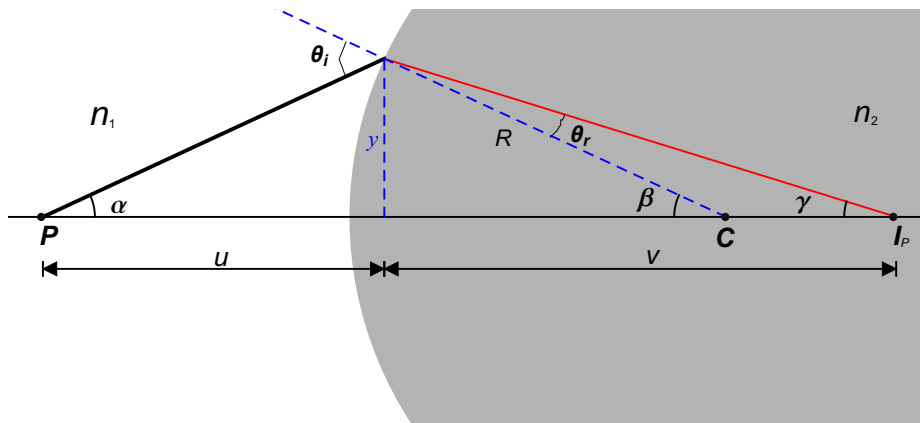


Figura 10

O ângulo exterior num vértice de um triângulo é igual à soma dos ângulos interiores adjacentes ao lado oposto a esse vértice.

Assim, para ângulos pequenos e em conjunto com a lei de Snell, da imagem seguinte podemos determinar que:

$$\begin{cases} \theta_i = \alpha + \beta \\ \beta = \theta_r + \gamma \\ n_1 \theta_i \approx n_2 \theta_r \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \alpha \approx \frac{y}{u} \\ \beta \approx \frac{y}{R} \\ \gamma \approx \frac{y}{v} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

10.2.2 Interfaces planas

Quando $R = \infty$ a superfície entre os dois meios refringentes é plana e deve ter-se igualmente

$$\frac{n_1}{u} = -\frac{n_2}{v} \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{n_2}{n_1}u$$

Se tivermos $n_2 < n_1$ então $|v| < u$, i.e. a profundidade aparente da imagem virtual é menor que a profundidade real.

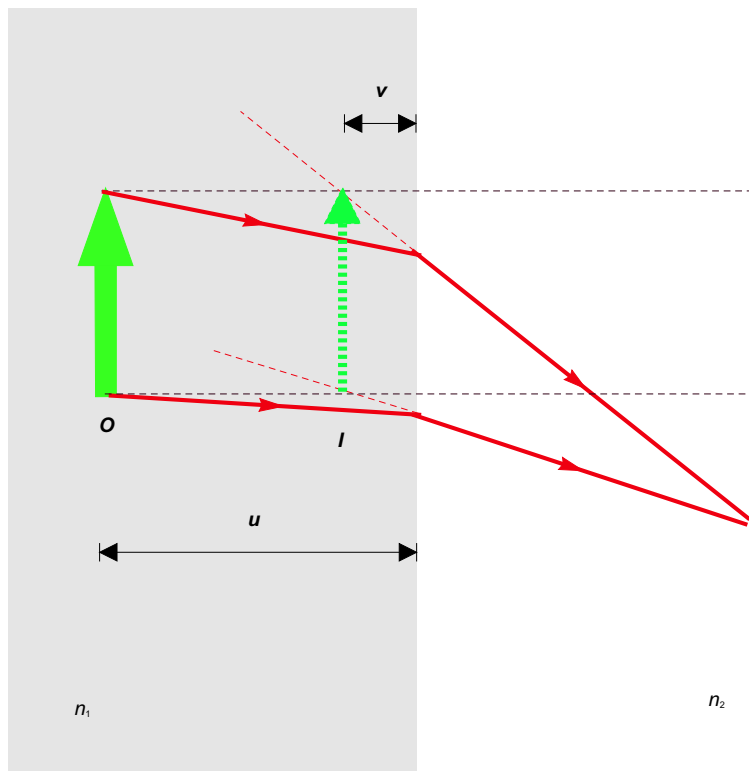


Figura 11

10.2.3 Distância focal

Para pequenos ângulos ($\theta < 15^\circ$)

$$\tan(\theta) = \frac{h}{f} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx \frac{h}{f}$$

Para raios de luz incidentes com inclinação ϕ a imagem forma-se à distância

$$h_i = f \tan(\phi) \approx f\phi$$

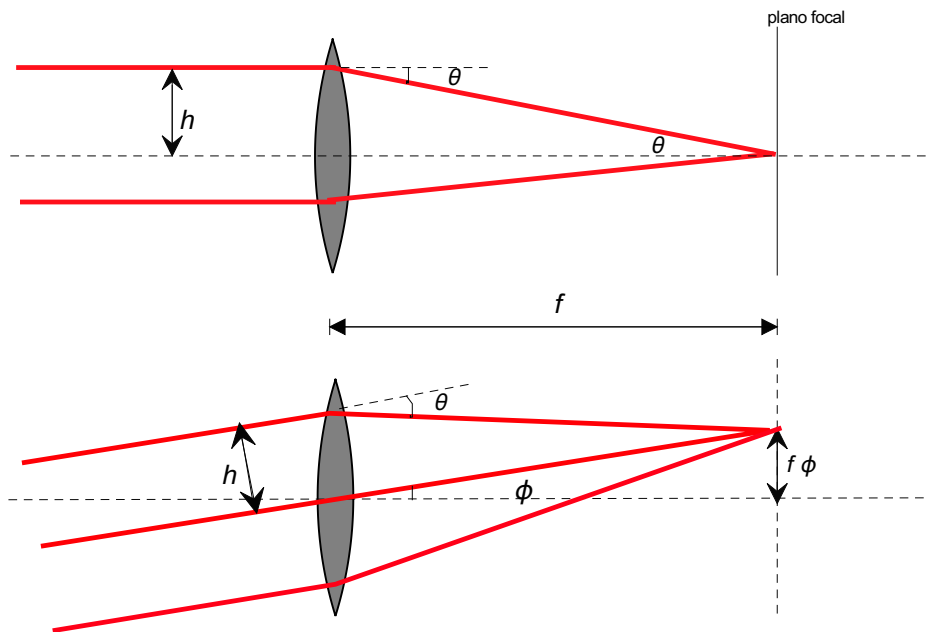


Figura 12

10.2.4 Equação das lentes finas

Numa lente formada por duas faces esféricas de raios R_1 e R_2 a fórmula $\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ pode ser sucessivamente aplicada primeiro na transição do ar ($n_1 = 1$) para a lente ($n_2 = n > 1$), e depois na transição da lente ($n_1 = n > 1$) para o ar ($n_2 = 1$). Designando por u' a distância da imagem v à face de saída (i.e. a primeira imagem é agora o objeto) e v' a respetiva imagem de saída, obtemos

$$\begin{cases} \frac{1}{u} + \frac{n}{v} = \frac{n-1}{R_1} & (ar \rightarrow lente) \\ \frac{n}{u'} + \frac{1}{v'} = \frac{1-n}{R_2} & (lente \rightarrow ar) \end{cases}$$

Se a lente é fina de espessura l podemos assumir que $u' \approx l - v$ (porque a primeira imagem é virtual, $v < 0$), e se $l \ll -v$, $u' \approx -v$ e obtemos, somando as equações,

$$\begin{cases} \frac{1}{u} + \frac{n}{v} = \frac{n-1}{R_1} & (ar \rightarrow lente) \\ -\frac{n}{v} + \frac{1}{v'} = \frac{1-n}{R_2} & (lente \rightarrow ar) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{u} + \frac{1}{v'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Podemos agora abandonar a notação v' e escrever para o objeto à distância u e a sua imagem final à distância v da lente

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}$$

onde $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ é a **potência da lente** em dioptrias e f respetiva **distância focal**.

Para objetos muito perto da lente, a uma distância u , o ângulo de refração θ de um raio incidindo à distância r do eixo continua a ser dado pela fórmula

$$\theta \approx \frac{r}{f}$$

mas a imagem já não se forma no plano focal, mas sim a uma distância v da lente. A relação entre os diversos ângulos é

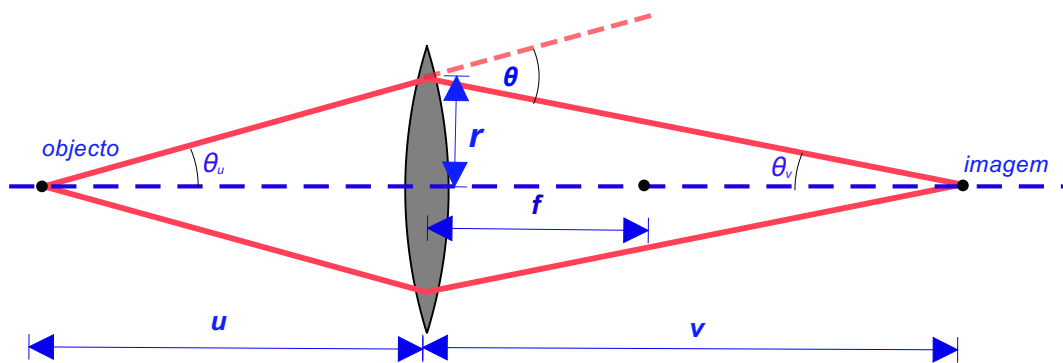


Figura 13

$$\theta_u + \theta_v + \pi - \theta = \pi \implies \theta = \theta_u + \theta_v$$

A partir daqui podemos retirar a relação entre as distâncias do objeto e da sua imagem

$$\begin{cases} \tan(\theta_u) = \frac{r}{u} \approx \theta_u \\ \tan(\theta_v) = \frac{r}{v} \approx \theta_v \end{cases} \implies \frac{r}{f} = \frac{r}{u} + \frac{r}{v} \quad \therefore \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

10.2.5 Formação de imagens

10.2.5.1 Imagem real

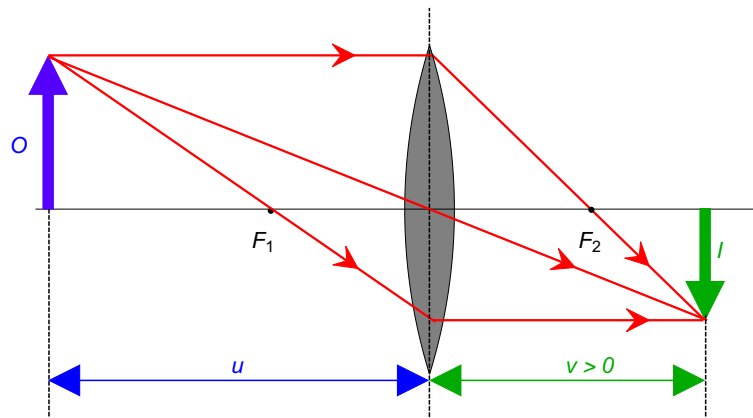


Figura 10.1: Lente Convexa: Imagem Real

10.2.5.2 Imagem virtual

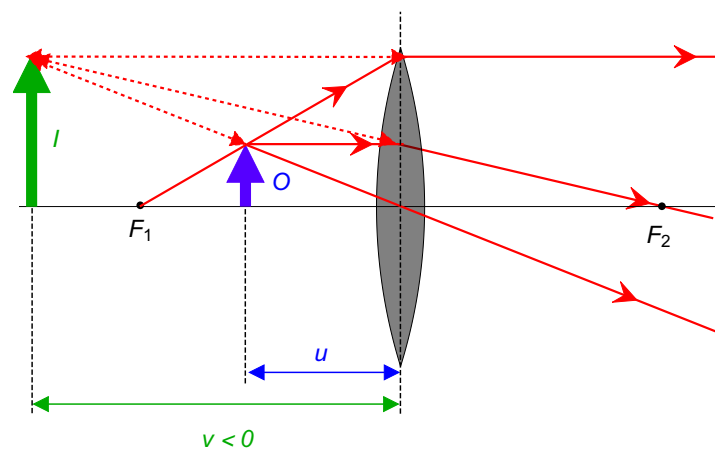


Figura 10.2: Lente Convexa: Imagem Virtual

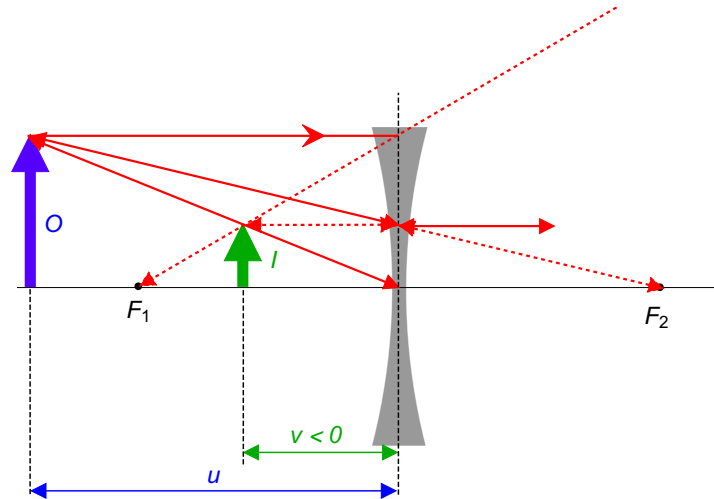


Figura 10.3: Lente Concava: Imagem Virtual

10.2.6 Magnificação lateral e Magnificação angular duma lente

Para uma imagem distante, a razão entre o tamanho da imagem e o tamanho real é designado poder de magnificação da lente ou **magnificação lateral**.

$$M = \frac{h_i}{h_o} = \frac{f \tan(\phi)}{h_o} = \frac{f}{h_o} \frac{h_o}{u} = \frac{f}{u}$$

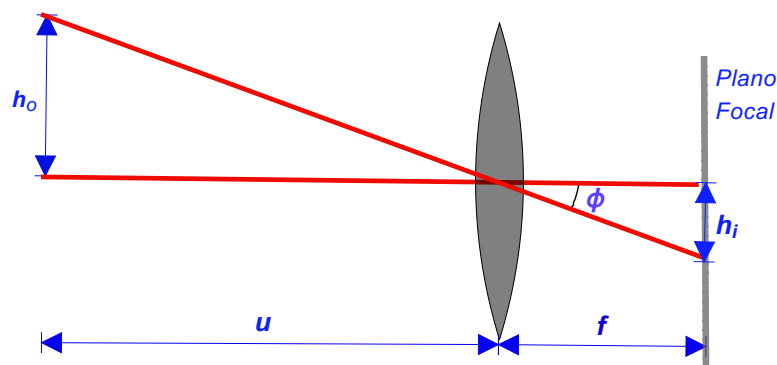


Figura 10.4: Magnificação angular duma lente

A **magnificação angular** de uma lente é dada pela razão entre a amplitude angular de um objeto a 25cm da lente e a amplitude angular do mesmo objeto colocado à distância focal da lente. A distância a que o olho consegue ver um objeto focado sem esforço e sem ajudas é maior ou igual a 25cm.

$$M_\theta = \frac{0.25}{f}$$

10.2.7 Magnificação angular num Microscópio

Para uma imagem virtual formada a 25 cm de uma lente ocular de potência $P_e = \frac{1}{f} = 16$ dioptrias, esta deve ficar a uma distância da imagem formada pela objetiva calculada a partir de

$$\frac{1}{u_e} - \frac{1}{0.25} = \frac{1}{f_e} = 16 \quad \Rightarrow \quad u_e = 0.05\text{ m} \quad (10.1)$$

A magnificação desta ocular é de $M_e = \frac{v}{u} = 5$.

Se a potência da lente da objetiva for $P_o = \frac{1}{f_o} = 50$ dioptrias, e estiver colocada a 20 cm da ocular, o objeto a observar deve ser colocado à distância u_o da objetiva de forma que

$$\frac{1}{u_o} + \frac{1}{v_o} = \frac{1}{f_o} = \frac{1}{u_o} + \frac{1}{0.15} = 50 \quad \Rightarrow \quad u_o = 0.023\text{ m} \quad (10.2)$$

Obtém-se assim uma magnificação $M_o = \frac{0.15}{0.023} = 6.5$. A magnificação total de ambas as lentes é $M = M_o \times M_e = 6.5 \times 5 = 32.5$

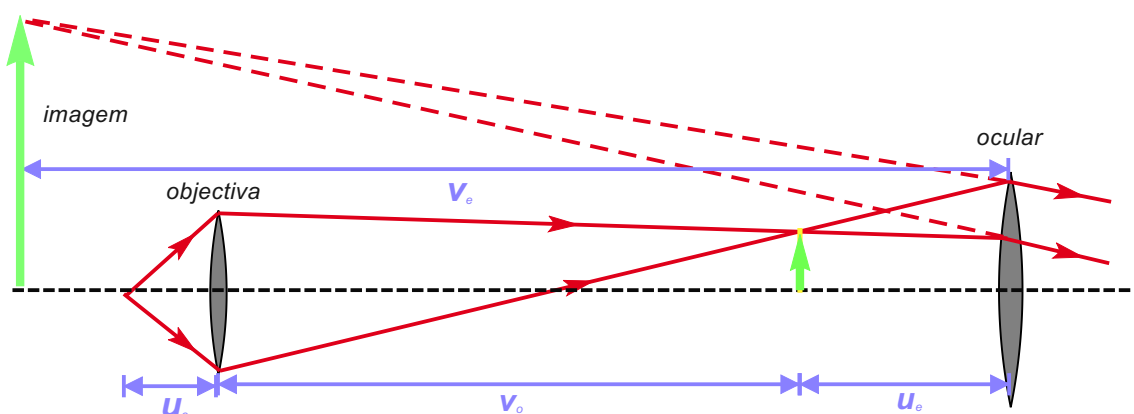


Figura 10.5: Microscópio

10.2.8 Magnificação angular dum telescópio

O objetivo de um telescópio é de aumentar a separação angular entre objetos a longa distância. A magnificação angular num telescópio é definida como a razão entre o ângulo α de entrada e o ângulo β de saída de um raio luminoso.

$$M_\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$

Assim, raios de luz que entrem na lente objetiva com um desvio de α relativamente ao eixo devem idealmente sair da lente ocular com uma inclinação $\beta > \alpha$. Note-se que o objeto para a ocular é a imagem da objetiva, formada no plano focal.

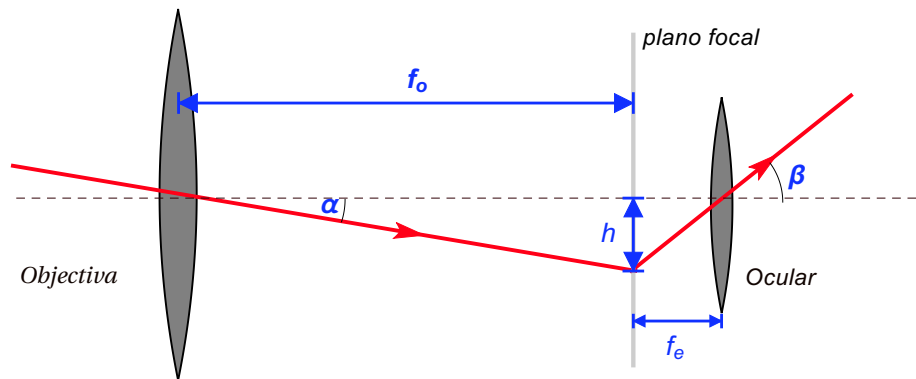


Figura 10.6: Magnificação angular dum telescópio

Com a lente ocular à distância focal f_e do plano focal da objetiva f_o a magnificação angular pode ser calculada

$$\begin{cases} \tan(\alpha) = \frac{h}{f_o} \\ \tan(\beta) = \frac{h}{f_e} \end{cases} \Rightarrow M_\theta = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{f_o}{f_e}$$

10.3 Telescópio Galileano

Para obter um telescópio que não inverta a imagem usando a fórmula da lente $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ para uma lente côncava,

$$M_\theta = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{f_o}{f_e}$$

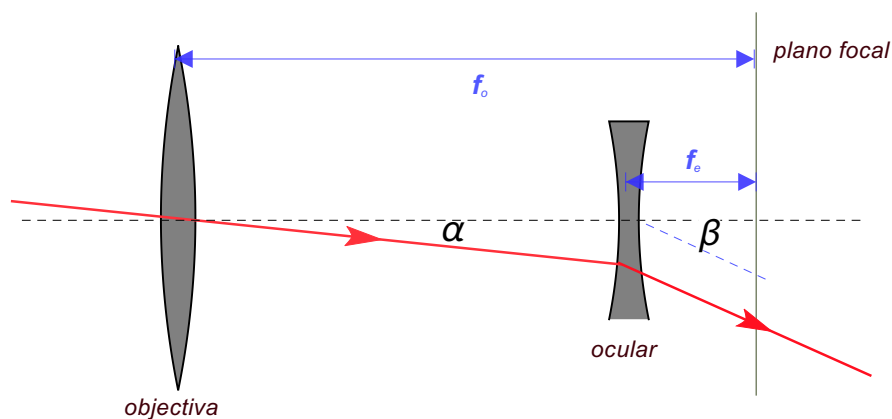


Figura 10.7: Telescópio Galileano

10.4 Telescópio Newtoniano

Consulte uma [lista de tipos conhecidos de telescópios aqui](#).

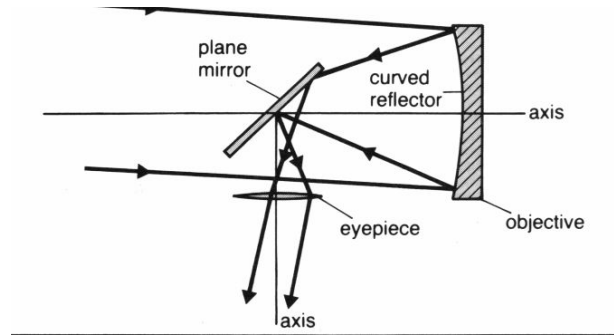


Figura 10.8: Telescópio Newtoniano

10.5 Abertura circular

O cálculo do ângulo de difração de uma abertura circular de diâmetro b indica que o primeiro mínimo ocorre para um ângulo

$$\sin(\theta_1) \approx \frac{1.2\lambda}{b}$$

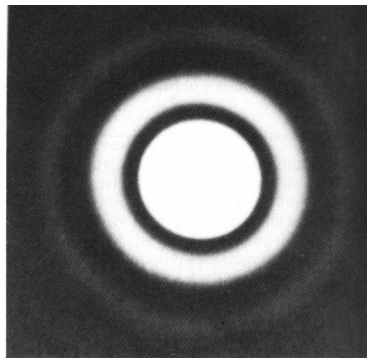


Figura 22

Conjugando este efeito de difração dum orifício de diâmetro b com a formação de uma imagem através de uma lente de distância focal f , podemos deduzir que a imagem de um ponto distante no plano focal da lente terá um diâmetro d dado por

$$d = f \tan(2\theta_1) \approx f \frac{2.4\lambda}{b}$$

10.5.0.1 Problema: Olho humano

Para um olho humano a distância focal é $f = 20\text{mm}$, e o diâmetro da pupila é aproximadamente $b = 4\text{mm}$.

Para luz com um comprimento de onda $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ determinar o diâmetro da imagem de um ponto distante formado na retina.

$$d = f \frac{2.4\lambda}{b} = 20\text{mm} \times \frac{2.4 \times 0.5\mu\text{m}}{4\text{mm}} = 6\mu\text{m}$$

10.5.0.2 Problema: Satélite espião

Qual é a resolução espacial de um satélite espião que se encontra em órbita a 100Km da superfície da Terra, sabendo que tem uma lente com um diâmetro de 1m ?

- (considere que o comprimento de onda detetado é da ordem de $\lambda = 0.45\mu\text{m}$)

A separação da imagem de dois pontos obedece ao critério de Rayleigh, e deve assim subtender o ângulo θ_1 .

$$\theta_1 = 1.2 \frac{\lambda}{b} = 1.2 \times \frac{0.45\mu\text{m}}{1\text{m}} = 5.4 \times 10^{-7} \text{rad}$$

$$r = h\theta_1 = 100\text{Km} \times 5.4 \times 10^{-7} = 5.4\text{cm}$$

VIII

Apêndices

A	Problemas	303
A.1	Formalismo Geral	
A.2	Electroestática	
A.3	Magnetoestática	
A.4	Força Eletromotriz e Fluxos	
A.5	Campos Variáveis e Corrente de Deslocamento	
A.6	Problemas de Potencial e Equação de Poisson	
A.7	Radiação e Campo Eletromagnético	
A.8	Correntes Elétricas e Forças	
A.9	Condições Fronteira	
A.10	Correntes e Campos	
A.11	Ondas Eletromagnéticas	
B	Bibliografia	329
	Artigos	
	Livros	
	Coletâneas	



A. Problemas

Conteúdo

A.1	Formalismo Geral	305
A.1.1	Trabalho duma força ao longo dum caminho dado	305
A.1.2	Identidades Vetoriais	305
A.1.3	Propriedades de Campo Coulombiano	306
A.1.4	Identidades Integrais	306
A.2	Electroestática	306
A.2.1	Protão num campo constante	306
A.2.2	Campo de Dipolo Elétrico	306
A.2.3	Potencial e Campo de um condutor retilíneo finito	306
A.2.4	Duas placas metálicas paralelas	307
A.2.5	Campo de uma esfera uniformemente carregada	307
A.2.6	Condensador com dois dielétricos	307
A.2.7	Condensador Plano com Dielétrico	308
A.2.8	Energia armazenada num condensador plano	308
A.2.9	Disco Uniformemente Carregado	308
A.2.10	Campo de Cabo Coaxial	308
A.2.11	Distribuição Volúmica de Carga	308
A.2.12	Capacidades em série	309
A.2.13	Capacidade de condutores	309
A.2.14	Densidade Superficial de Carga Induzida em Condensador	310
A.2.15	Dielétrico de permitividade variável	310

A.2.16	Condutores Coaxiais	310
A.3	Magnetoestática	310
A.3.1	Corrente retilínea e eletrão	310
A.3.2	Fluxo de Campo Magnético em condutores de várias Geometrias	310
A.3.3	Cilindro condutor oco rodando em torno do eixo	311
A.3.4	Lei de Biot-Savart	311
A.3.5	Indução Magnética no centro de uma espira quadrada	311
A.3.6	Força entre correntes paralelas	311
A.3.7	Correia de Transporte	311
A.3.8	Cilindro carregado superficialmente rodando sobre o eixo	312
A.3.9	Cilindro uniformemente carregado rodando sobre o eixo	312
A.3.10	Corrente cilíndrica uniforme	312
A.3.11	Corrente em Espira Quadrada	312
A.3.12	Força entre espira retangular e fio com correntes	312
A.3.13	Corrente em condutor em forma de U	313
A.3.14	Transição entre meios separados por corrente superficial	313
A.3.15	Campo de um cabo coaxial	313
A.4	Força Eletromotriz e Fluxos	313
A.4.1	Pêndulo condutor em Campo Magnético	313
A.4.2	Aro condutor em campo magnético	314
A.4.3	Circuito saindo de campo Magnético	314
A.4.4	f.e.m. em Solenóides	314
A.4.5	Gerador de Corrente Alternada	314
A.4.6	Fluxo de Campo Magnético	315
A.4.7	Condutor em Movimento em Campo Magnético localizado	315
A.4.8	Circuito Variável em campo magnético fixo	315
A.4.9	Gerador de Faraday	315
A.5	Campos Variáveis e Corrente de Deslocamento	316
A.5.1	Campo Elétrico variável e equações de Maxwell	316
A.5.2	Indução Magnética em circuito variável	316
A.5.3	Condensador Plano, Dielétrico e Descarga	316
A.6	Problemas de Potencial e Equação de Poisson	317
A.6.1	Cargas Induzidas num Plano Condutor e Método das Imagens	317
A.6.2	Potencial de Distribuição de dois semi-planos infinitos	317
A.6.3	Potencial e Campo de esferas ocas e concêntricas	317
A.6.4	Duas Esferas Concêntricas	318
A.7	Radiação e Campo Eletromagnético	318
A.7.1	Potencial Vetor e Gauge	318
A.7.2	Campo Eletromagnético de Onda Plana	318
A.7.3	Vetor de Poynting	319
A.7.4	Cilindro oco, não condutor	319
A.7.5	Energia Radiante Solar	319

A.7.6	Irradiação Solar	319
A.8	Correntes Elétricas e Forças	320
A.8.1	Resistência, Corrente e Voltagem	320
A.8.2	Circuito Resistências em Paralelo	320
A.8.3	Correntes e Dissipação Ohmicas	320
A.8.4	Tempo de Carga de Condensador	320
A.8.5	Relâmpago	320
A.8.6	Força de Lorentz	321
A.8.7	Espira Retangular Rodando em Campo Magnético	321
A.8.8	Campo Magnético em Condutor Cilíndrico com Corrente	321
A.8.9	Campo Magnético de Corrente Plana	322
A.8.10	Campo Magnético de cilindro oco	322
A.8.11	Binário em Momento Magnético	322
A.8.12	Força de Eletromagnete	322
A.8.13	Força entre Magnetes	323
A.8.14	Betatrão	323
A.9	Condições Fronteira	323
A.9.1	Condições Fronteira de Campo Magnético na Matéria	323
A.9.2	Condições Fronteira de Campo Magnético e Corrente Superficial	323
A.10	Correntes e Campos	324
A.11	Ondas Eletromagnéticas	326
A.11.1	Ondas Planas, Refração, Leis de Fresnel	326

A.1 Formalismo Geral

A.1.1 Trabalho duma força ao longo dum caminho dado

Exercício A.1

Uma partícula está submetida a uma força

$$\vec{F} = 2(y^2 - x) \vec{e}_x + 3xy \vec{e}_y \text{ (N)}$$

Determine o trabalho realizado por essa força quando a partícula se desloca da origem para o ponto $P = (2, 4)$ ao longo dos seguintes caminhos alternativos:

- Primeiro ao longo do eixo \vec{e}_x e depois paralelo ao eixo \vec{e}_y .
- Ao longo da reta OP .
- Ao longo da parábola $y = x^2$.

A.1.2 Identidades Vetoriais

Exercício A.2

Prove as seguintes identidades vetoriais:

- (a) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$
 (b) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$
 (c) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$

A.1.3 Propriedades de Campo Coulombiano

Exercício A.3

Considere o campo elétrico \vec{E} duma carga q imóvel. Verifique explicitamente que

- (a) $\nabla \times \vec{E} = 0$.
 (b) $\nabla \cdot \vec{E} = 0$.
 (c) $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$.
 (d) Existe uma função escalar ϕ tal que $\vec{E} = -\nabla\phi$.

A.1.4 Identidades Integrais

Exercício A.4

Mostre que são válidas as seguintes identidades:

- (a) $\oint_{S=\partial\Omega} d\vec{S} \times \vec{M} = \iiint_{\Omega} \nabla \times \vec{M} dV$ (Sugestão: use o teorema de Gauss)
 (b) $\oint_{\Gamma=\partial S} \psi d\vec{\ell} = - \iint_S \nabla\psi \times d\vec{S}$ (Sugestão: use o teorema de Stokes)

A.2 Electroestática

A.2.1 Protão num campo constante

Exercício A.5

Um campo elétrico constante $\vec{E} = 640 \vec{e}_x$ (N/C) atua sobre um protão ($m_p = 1.672 \times 10^{-27}$ Kg):

- (a) Determine a aceleração do protão.
 (b) Determine o tempo que leva a acelerar até à velocidade $v_p = 1.2 \times 10^6$ m/s.
 (c) Que distância percorre neste tempo ?
 (d) Qual é a sua energia cinética final?

A.2.2 Campo de Dipolo Elétrico

Exercício A.6

Um dipolo elétrico é o nome por que se designa o conjunto de cargas $Q_1 = +q$, $Q_2 = -q$, separadas por uma distância $D = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

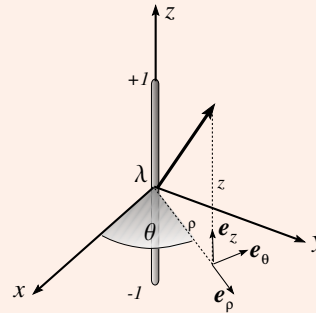
- (a) Escreva a expressão para o potencial elétrico $V(\vec{r})$ causado pelas duas cargas.
 (b) Mostre que a distâncias grandes comparadas com a separação D entre as cargas, se pode considerar que \vec{E} só depende do momento dipolar $\vec{d} = Q\vec{r}_{12}$.
 (c) Calcule o campo \vec{E} a grandes distâncias do dipolo, em coordenadas polares.

A.2.3 Potencial e Campo de um condutor retilíneo finito

Exercício A.7

Um fio retilíneo de comprimento $L = 2 \text{ m}$ está uniformemente eletrizado, sendo a densidade linear de carga $\lambda = 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{m}}$.

- Calcule o potencial elétrico V num ponto P que se situa a 1 m de distância da extremidade do fio e no seu alinhamento.
- Calcule o campo elétrico \vec{E} no ponto P através do cálculo de ∇V .
- Calcule o campo num ponto qualquer do espaço à volta do fio.

**A.2.4 Duas placas metálicas paralelas****Exercício A.8**

Duas placas metálicas paralelas separadas uma da outra por 5.33 mm têm uma diferença de potencial de $\Delta V = 600 \text{ V}$ entre elas.

- Qual é a magnitude e direção do campo elétrico entre as placas.
- Qual é a magnitude e direção do campo elétrico fora das placas.
- Quanto trabalho deve ser realizado num elétron a 2.9 mm da placa positiva para o deslocar até à placa negativa.
- Qual é a carga total que deve existir em cada placa se estas tiverem 100 cm^2 ?

A.2.5 Campo de uma esfera uniformemente carregada**Exercício A.9**

Uma esfera de 5 cm de raio e carregada uniformemente, com densidade volúmica de carga $\rho = 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$, está centrada no ponto $(-5, 0, 0) \text{ cm}$. Na vizinhança encontra-se uma carga pontual de $8 \times 10^{-3} \text{ C}$, situada no ponto $(0, 0, 5) \text{ cm}$.

- Calcule o campo elétrico \vec{E} num ponto do espaço livre e num ponto dentro da esfera.
- Calcule a divergência $\nabla \cdot \vec{E}$ nesses pontos.
- Calcule o fluxo do campo elétrico através de uma esfera de raio $R = 1 \text{ m}$ centrada no ponto $(-0.5, 0, 0) \text{ cm}$.

A.2.6 Condensador com dois dielétricos**Exercício A.10**

Um condensador de armaduras paralelas distanciadas de 3 cm contém dois dielétricos cuja superfície de separação é plana e paralela às duas armaduras. Considere as espessuras dos dielétricos e as constantes dielétricas respetivamente $d_1 = 2 \text{ cm}$, $k_1 = 6$, e $d_2 = 1 \text{ cm}$, $k_2 = 12$. Suponha que é aplicada uma diferença de potencial $\Delta V = 200 \text{ V}$ entre as armaduras.

- (a) Determine a densidade de carga nas armaduras do condensador.
- (b) Determine os campos elétricos nos dielétricos.
- (c) Calcule a polarização em cada dielétrico.
- (d) Calcule a capacidade deste condensador.

A.2.7 Condensador Plano com Dielétrico

Exercício A.11

Um condensador plano de capacidade $C = 100 \text{ pF}$ e armaduras de área $A = 100 \text{ cm}^2$ preenchidas com um dielétrico de mica de constante dielétrica $k = 5.4$. Quando existe uma diferença de potencial $V = 50 \text{ V}$ entre as armaduras determine:

- (a) O campo \vec{E} dentro do dielétrico.
- (b) A carga livre Q nas armaduras.
- (c) A densidade superficial de carga σ_{pol} no dielétrico.

A.2.8 Energia armazenada num condensador plano

Exercício A.12

Um condensador de capacidade C_1 é carregado por uma bateria que disponibiliza uma diferença de potencial V_0 . Esta bateria é posteriormente retirada e substituída por um condensador descarregado de capacidade C_2 .

- (a) Qual é a queda de potencial entre as placas dos condensadores?
- (b) Qual é a energia armazenada nos condensadores antes e depois da substituição da bateria?
- (c) Explique a diferença encontrada na alínea anterior.

A.2.9 Disco Uniformemente Carregado

Exercício A.13

Um disco de raio R está uniformemente carregado com σ (C/m^2)

- (a) Escreva a expressão para o campo elétrico e para o potencial.
- (b) Calcule o campo em qualquer ponto do eixo do disco.
- (c) Dê uma expressão aproximada para o potencial no eixo a grandes distâncias do disco.
- (d) Calcule o potencial dum ponto na periferia do disco.

A.2.10 Campo de Cabo Coaxial

Exercício A.14

Um cabo coaxial é constituído por dois condutores cilíndricos concêntricos, de raios $r_0 = 5 \text{ mm}$ e $r_1 = 15 \text{ mm}$. Supondo que o condutor exterior está a um potencial $V_1 = 400 \text{ V}$ e o interior ligado à terra.

- (a) Calcule o campo elétrico e o potencial no espaço entre os condutores;
- (b) Determine a densidade linear de carga do condutor interior;
- (c) Calcule a energia eletrostática por unidade de comprimento.

A.2.11 Distribuição Volúmica de Carga

Exercício A.15

Considere uma carga Q distribuída numa esfera de raio R com a densidade $\rho(r) = A(R-r)$ (Cm^{-3}) para $0 < r < R$

- Determine A em função de Q e R .
- Calcule o campo elétrico dentro e fora da esfera.
- Verifique a continuidade do campo elétrico sobre a superfície esférica.
- Verifique a equação de Poisson.

A.2.12 Capacidades em série**Exercício A.16**

Um condensador de placas paralelas consiste em duas placa metálicas de 50 cm de lado, separadas por 1 cm . Uma fatia de enxofre com 6 mm de espessura (constante dielétrica relativa $\kappa = 4$) é colocada sobre a placa inferior, deixando um espaço de 4 mm de ar até à placa superior.

- Determine a capacidade do condensador.
- Determine a energia que o condensador pode armazenar sem o dielétrico e com ele inserido.
- Determine a capacidade do condensador se o dielétrico de enxofre tivesse uma espessura de 1 cm mas estivesse apenas parcialmente introduzido entre as armaduras.
- Determine a força que se exerce sobre o dielétrico para o introduzir entre as armaduras do condensador mantido (i) a um potencial constante $V = 500(V)$ ou (ii) isolado.

A.2.13 Capacidade de condutores**Exercício A.17**

Determine as características dos seguintes condensadores

- Um cabo coaxial em que o condutor interior tem raio $r_i = 5\text{ mm}$ e o cilindro exterior tem raio $r_e = 15\text{ mm}$.
- Dois linhas paralelas infinitas, carregadas com igual densidade de carga mas de sinais opostos, separadas por uma distância d
- Um condensador esférico, em que a esfera interior tem raio $R_i = 10\text{ cm}$ e a esfera exterior $R_e = 15\text{ cm}$ e espessura $d = 5\text{ cm}$.
- Um condensador de placas quadradas de lado a tem uma das armaduras inclinada de θ graus em relação à outra. Mostre que, para pequenos valores de θ , a capacidade é

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right)$$

- Qual é a voltagem máxima que pode ser aplicada numa esfera metálica isolada de 30 cm de diâmetro no ar, se o campo de descarga do ar for 3 MV m^{-1} ?
- Um condensador armazena 1 KWh de energia. Qual das geometrias é mais económica em termos de volume: condensador plano, esférico ou cilíndrico?

A.2.14 Densidade Superficial de Carga Induzida em Condensador**Exercício A.18**

Um condensador de placas paralelas tem capacidade $C = 100 \text{ pF}$, e cada placa tem uma área $A = 100 \text{ cm}^2$. O dielétrico usado entre as placas é mica ($\kappa = 5.4$). Quando a diferença de potencial entre as placas é $\Delta\phi = 50 \text{ V}$ determine

- O campo \vec{E} dentro do dielétrico.
- A carga livre nas placas.
- A densidade superficial de carga induzida.

A.2.15 Dielétrico de permissividade variável**Exercício A.19**

Um condensador de placas de área A paralelas é cheio com um dielétrico de permissividade variável $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\kappa y}{d}\right)$, onde $y = 0$ numa placa e $y = d$ noutra

- Determine \vec{E} , \vec{D} , \vec{P} e ϕ em função de y .
- Faça um gráfico mostrando a variação de ϵ , \vec{E} , \vec{D} , \vec{P} e ϕ .
- Determine a capacidade C .
- Determine a densidade de carga de polarização ρ_{pol} em função de y , e as densidades superficiais de carga σ_+ e σ_-

A.2.16 Condutores Coaxiais**Exercício A.20**

O espaço entre dois condutores de cobre cilíndricos e coaxiais está cheio de grafite (resistividades $\rho_{Cu} = 1.7 \times 10^{-8} \Omega m$, $\rho_C = 3.5 \times 10^{-5} \Omega m$). Se existir uma diferença de potencial entre os dois condutores, determine

- O campo elétrico \vec{E} dentro da grafite;
- A corrente I entre os dois condutores;
- A resistência da grafite.

A.3 Magnetoestática**A.3.1 Corrente retilínea e eletrão****Exercício A.21**

Um fio retilíneo comprido conduz uma corrente $I = 50 \text{ A}$. Um eletrão ($e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$) é disparado a 5 cm do condutor, com velocidade $v = 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Que força age sobre o eletrão se a sua velocidade for:

- dirigida para o fio no plano perpendicular a este?
- paralela ao fio e no sentido da corrente.
- na direção ortogonal às definidas em (a) e (b).

A.3.2 Fluxo de Campo Magnético em condutores de várias Geometrias**Exercício A.22**

Determine o fluxo do campo magnético \vec{B} criado pelos seguintes condutores:

- (a) Um solenóide de $N = 2000$ espiras percorridas por uma corrente I , enroladas uniformemente ao longo de 50 cm de um tubo cilíndrico com 4 cm de diâmetro.
- (b) Um cabo coaxial feito de cilindros condutores de raios a e b ($b > a$). A corrente no condutor interior é I e no exterior $-I$.
- (c) Dois condutores cilíndricos de raio a , paralelos, separados duma distância D . A corrente num dos condutores é I e no outro $-I$.

A.3.3 Cilindro condutor oco rodando em torno do eixo

Exercício A.23

Um cilindro oco de raio R tem uma densidade superficial de carga σ uniforme.

- (a) Determine o campo elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} em todo o espaço.
- (b) Se o cilindro rodar em torno do seu eixo com uma velocidade angular ω , como se alteram os campos da alínea (a)?
- (c) Se o eixo do cilindro for um tubo de raio $r < R$, ligado ao cilindro exterior por um braço condutor radial, explique o que é que acontece nas condições da alínea (b). Determine os campos no equilíbrio.
- (d) Que efeito teria uma corrente I percorrendo o cilindro exterior no sentido axial?

A.3.4 Lei de Biot-Savart

Exercício A.24

Considere um fio retilíneo muito comprido (suponha infinito), percorrido por uma corrente estacionária I .

- (a) Aplicando a Lei de **Biot-Savart**, calcule $\vec{B}(\vec{r}_p)$ num ponto P à distância d do fio.
- (b) Usando o resultado anterior, mostre que dele resulta $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (i.e. $\text{div } \vec{B} = 0$).
- (c) Repita o cálculo de \vec{B} , mas aplicando a Lei de **Ampère**.

A.3.5 Indução Magnética no centro de uma espira quadrada

Exercício A.25

Calcule o valor da indução magnética \vec{B} no centro de uma espira quadrada cujos lados condutores, de comprimento ℓ , são percorridos por uma corrente I .

$$\text{(Resp:)} \quad \vec{B} = 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{\pi \ell} \vec{n} \quad (\vec{n} \text{ normal à espira.})$$

A.3.6 Força entre correntes paralelas

Exercício A.26

Sejam dados dois condutores retilíneos e paralelos, percorridos por correntes I . Qual a natureza da força entre eles (repulsiva ou atrativa), nos casos em que as correntes são:

- (a) Paralelas;
- (b) Antiparalelas.

A.3.7 Correia de Transporte

Exercício A.27

Numa fábrica de plásticos, a fricção nos rolos cilíndricos ao longo dos quais um filme plástico é arrastado, à velocidade v , gera na superfície deste filme uma carga superficial de $+\sigma \left(\frac{C}{m^2}\right)$. Calcule o valor aproximado da indução magnética \vec{B} próximo da superfície do plástico.

$$\text{(Resp:)} \quad \vec{B} = \mu_o \sigma \frac{v}{2} \vec{n} \quad (\vec{n} \text{ normal à superfície do filme.})$$

A.3.8 Cilindro carregado superficialmente rodando sobre o eixo**Exercício A.28**

Considere um cilindro de raio R cuja superfície está carregada uniformemente com uma carga de densidade $\sigma \left(\frac{C}{m^2}\right)$. O cilindro gira em torno do seu eixo com uma velocidade angular $\vec{\omega}$. Calcule o valor de \vec{B} assim criado dentro e fora do cilindro.

$$\text{(Resp:)} \quad \vec{B}_{int} = \mu_o \sigma R \vec{\omega}, \quad \vec{B}_{ext} = 0$$

A.3.9 Cilindro uniformemente carregado rodando sobre o eixo**Exercício A.29**

Um disco de raio R , carregado uniformemente com uma carga de Q , gira em torno do seu eixo com uma velocidade angular $\vec{\omega} \frac{rad}{s}$. Qual é o valor de \vec{B} no seu centro?

$$\text{(Resp:)} \quad \vec{B}(0) = \frac{\mu_o Q \vec{\omega}}{2\pi R}$$

A.3.10 Corrente cilíndrica uniforme**Exercício A.30**

Um condutor cilíndrico, de raio R , é percorrido por uma corrente I uniformemente distribuída no seu interior (i.e. a densidade de corrente é $\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$). Calcule $\vec{B}_{int}(r)$, dentro do cilindro ($r < R$), e fora dele ($r > R$), $\vec{B}_{ext}(r)$.

$$\text{(Resp:)} \quad \vec{B}_{int}(r < R) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{r}{R^2} \vec{e}_\theta; \quad \vec{B}_{ext}(r > R) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

A.3.11 Corrente em Espira Quadrada**Exercício A.31**

Dada uma espira quadrada de lado L , percorrida por uma corrente I , calcule o momento mecânico \vec{N} exercido sobre a espira por um campo magnético uniforme de indução \vec{B} , com orientação arbitrária.

$$\text{(Resp:)} \quad \vec{N} = IL^2 \vec{n} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (\vec{n} \text{ normal à espira.})$$

A.3.12 Força entre espira retangular e fio com correntes**Exercício A.32**

Considere uma espira retangular, de lados l_1 e l_2 , é percorrida por uma corrente I . Paralelamente a um dos lados, e a uma distância d , encontra-se um fio retilíneo muito

comprido, percorrido por uma corrente I_0 . Calcule a força exercida por esta corrente sobre a espira.

A.3.13 Corrente em condutor em forma de U

Exercício A.33

Dois condutores muito longos e paralelos estão ligados por uma semi-circunferência condutora de raio R , complanar com os dois condutores e com centro num ponto P , igualmente à distância R de cada um deles. Calcule a indução magnética \vec{B} no ponto P quando o conjunto é percorrido por uma corrente I .

$$\text{(Resp:)} \quad \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right)$$

A.3.14 Transição entre meios separados por corrente superficial

Exercício A.34

Na superfície de separação entre dois meios magnéticos, caracterizados por permeabilidades μ_1 e μ_2 passa uma corrente cuja densidade superficial é dada por J_S ($\frac{A}{m}$). Escreva as relações entre os valores do campo magnético de um lado e do outro da superfície de separação.

A.3.15 Campo de um cabo coaxial

Exercício A.35

Num cabo coaxial muito longo, uma corrente I circula no sentido \vec{e}_z no condutor interior e regressa no sentido $-\vec{e}_z$ via condutor exterior. O raio do condutor interior é R_1 , e o condutor exterior tem raios R_2 (interno) e R_3 (externo), com $R_1 < R_2 < R_3$. Calcule $\vec{B}(r)$ em todas as regiões e faça o respetivo gráfico.

$$\text{(Resp:)} \quad (R_2 \leq r \leq R_3) : \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

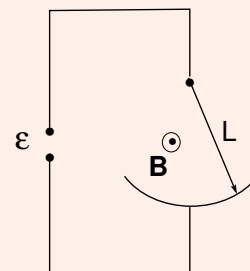
A.4 Força Eletromotriz e Fluxos

A.4.1 Pêndulo condutor em Campo Magnético

Exercício A.36

Um pêndulo de fio metálico e escova oscila num campo magnético $\vec{B} = 250 \vec{e}_z$ (mT), sendo a amplitude da oscilação $d = 20$ cm.

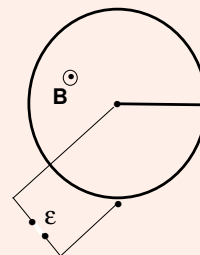
- (a) Se o comprimento do pêndulo for $L = 4$ m, determine o valor máximo da f.e.m. \mathcal{E} que aparece nos terminais.



A.4.2 Aro condutor em campo magnético

Exercício A.37

Um aro condutor com um raio metálico roda num campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ que lhe é perpendicular. Um circuito externo faz contacto com o eixo e o aro através de escovas condutoras.

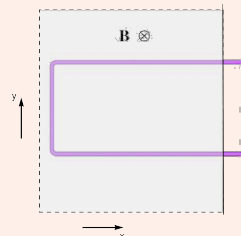


- Se o aro rodar em torno do eixo \vec{e}_z que lhe passa pelo centro com velocidade angular $\omega = 3000 \text{ rpm}$, determine a f.e.m. \mathcal{E} induzida no circuito.
- Se em vez disso uma corrente $I = 100 \text{ mA}$ percorrer o circuito, determine o binário (momento de forças) exercido no aro.

A.4.3 Circuito saindo de campo Magnético

Exercício A.38

Na figura um condutor retangular de largura $l = 1 \text{ m}$ é puxado no plano XY com velocidade uniforme $\vec{v} = 10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)$ para fora de uma região de largura infinita, com fronteira em $x = 0$, onde existe um campo magnético constante $\vec{B} = -0.1 \vec{e}_z \text{ (T)}$. Se o condutor tiver uma resistência $R = 1 \text{ k}\Omega$,



- Calcule a magnitude e o sentido da corrente I criada no circuito.
- Determine a força \vec{F} aplicada ao condutor.
- Mostre que a potência dissipada em calor pela resistência do condutor iguala a potência mecânica necessária para deslocar o condutor.

A.4.4 f.e.m. em Solenóides

Exercício A.39

Calcule a f.e.m. em dois solenóides com N_1 e N_2 espiras,

- Quando colocados perto um do outro, com eixos alinhados, e percorridos por correntes I_1 e I_2 .
- Na mesma configuração anterior, mas ligados em série, sendo a corrente I comum e o sentido de rotação das espiras inverso um do outro.
- Na mesma configuração anterior, mas ligados em série, sendo a corrente I comum e o sentido de rotação das espiras o mesmo num e noutro.
- Determine as impedâncias respetivas nas alíneas (b) e (c).

A.4.5 Gerador de Corrente Alternada

Exercício A.40

Um gerador de corrente alterna simples pode ser uma espira retangular que roda com velocidade angular ω constante num campo magnético \vec{B} . Se a espira tiver comprimento D e largura L , determine a f.e.m. induzida se

- (a) O campo \vec{B} for constante.
- (b) O campo magnético varia no tempo $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)$ com a mesma frequência com que a espira roda.

A.4.6 Fluxo de Campo Magnético

Exercício A.41

Determine o fluxo do campo magnético \vec{B} criado pelos seguintes condutores:

- (a) Um solenóide de $N = 2000$ espiras percorridas por uma corrente I , enroladas uniformemente ao longo de 50 cm de um tubo cilíndrico com 4 cm de diâmetro.
- (b) Um cabo coaxial feito de cilindros condutores de raios a e b ($b > a$). A corrente no condutor interior é I e no exterior $-I$.
- (c) Dois condutores cilíndricos de raio a , paralelos, separados duma distância D . A corrente num dos condutores é I e no outro $-I$.
- (d) Um longo solenóide com N espiras, torcido na forma de um toros de raio maior R e raio menor r (toroide).

A.4.7 Condutor em Movimento em Campo Magnético localizado

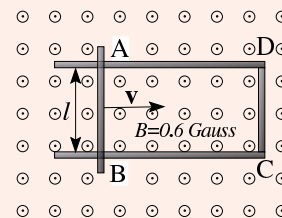
Exercício A.42

Determine a f.e.m. induzida num fio retilíneo que se desloca perpendicularmente a um campo magnético uniforme \vec{B} , confinado a uma região circular de raio R .

A.4.8 Circuito Variável em campo magnético fixo

Exercício A.43

Considere o circuito fechado $ABCD$ (fig 2). O lado esquerdo, de comprimento $\ell = 2\text{ m}$, move-se para a direita com velocidade $v = 50\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. O circuito, de resistência $R = 1.2 \times 10^{-5}\Omega$, encontra-se em presença do campo magnético terrestre, o qual está orientado na perpendicular do plano da página, e para cima, sendo o seu módulo $B = 6. \times 10^{-5}\text{ T}$.



- (a) Qual a f.e.m. induzida no circuito?
- (b) Qual a intensidade do campo elétrico no lado AB ?
- (c) Qual a força sobre cada eletrão devido ao movimento do fio no campo magnético?
- (d) Qual a intensidade e sentido da corrente no fio?
- (e) Que força deve ser aplicada por um agente exterior para manter a velocidade constante?
- (f) Calcule a taxa de conversão de energia elétrica em energia térmica.

A.4.9 Gerador de Faraday

Exercício A.44

Um disco fino de 30 cm de diâmetro é colocado num campo constante e uniforme

$\vec{B} = 600\text{mT}$, orientado na direção da normal ao disco. Na versão de **Gerador de Faraday**, uma escova contacta a periferia do disco e outra o seu eixo

- Se o disco fizer 1800r.p.m. , determine a f.e.m. induzida no terminais ligados às escovas.
- Se o campo magnético variar no tempo como $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)$, com $B_0 = 600\text{mT}$ e $\omega = 2\pi \times 5\text{ rad s}^{-1}$, determine a f.e.m. induzida.

A.5 Campos Variáveis e Corrente de Deslocamento

A.5.1 Campo Elétrico variável e equações de Maxwell

Exercício A.45

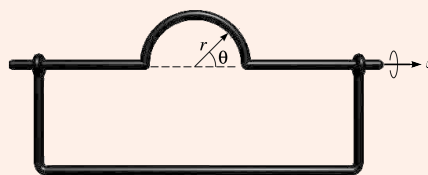
Numa região do espaço livre ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$) tem-se $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \gamma z) \vec{e}_x$ onde E_0 , ω e γ são constantes.

- Usando $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, calcule $\vec{B}(t)$ nessa região e verifique que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.
- Calcule o $\nabla \times \vec{H}$ e verifique se coincide com a densidade de corrente de deslocamento.

A.5.2 Indução Magnética em circuito variável

Exercício A.46

Uma barra metálica rígida, tem uma parte semicircular de raio r (fig.1). A barra roda axialmente com uma frequência angular constante $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_x$ num campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ uniforme.



- Calcule a força de Lorentz exercida sobre cada eletrão ao longo da barra. Exprima o resultado na parte semicircular em função do ângulo θ e do tempo.
- Esta força origina o aparecimento de uma corrente elétrica I no circuito de que a barra faz parte. Determine a força eletromotriz ϵ_{fem} no circuito.
- Determine o sentido da corrente I em função do tempo se $\omega > 0$.
- Calcule a potência elétrica dissipada no circuito. Mostre que esta potência dissipada é igual ao trabalho mecânico necessário para manter a velocidade angular da barra constante.

A.5.3 Condensador Plano, Dielétrico e Descarga

Exercício A.47

Um condensador de placas paralelas e capacidade C está isolado e cheio com um material de constante dielétrica κ , condutibilidade σ . Inicialmente o condensador está carregado com carga Q_0 .

- Mostre que a carga diminui nas armaduras como uma função exponencial do tempo $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$, onde τ exprime a constante de tempo da descarga.
- Determine a constante de tempo τ desta descarga para um dielétrico de quartzo: constante dielétrica $\kappa = 4.3$, resistividade $\rho = 1 \times 10^{13} \Omega m$.
- Determine as correntes de condução e de deslocamento no dielétrico.
- Explique porque é que não se observa campo magnético no dielétrico.

A.6 Problemas de Potencial e Equação de Poisson

A.6.1 Cargas Induzidas num Plano Condutor e Método das Imagens

Exercício A.48

Considere um plano condutor infinito e uma carga de valor $+q$ situada no eixo dos z a uma distância d do plano (posição $(0, 0, d)$). A carga $+q$ induz uma distribuição de carga no plano dada por

$$\sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(d^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Mostre que a carga total induzida no plano é $-q$.
- Mostre que o campo elétrico criado na região $z \geq 0$ é o mesmo do que o criado por uma carga de valor $-q$ situada no ponto dado pela imagem no espelho da carga $+q$ em relação ao plano, ou seja na posição $(0, 0, -d)$. (Sugestão: Calcule o campo elétrico num ponto infinitamente próximo do plano e recorde que um condutor é uma equipotencial e use a relação de descontinuidade do campo elétrico através de uma superfície carregada).
- Calcule o potencial num ponto arbitrário causado pela carga $+q$ e pela carga imagem $-q$. Esboce as equipotenciais.
- Determine o(s) ponto(s) onde o campo elétrico é nulo.

NB: $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$; $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

A.6.2 Potencial de Distribuição de dois semi-planos infinitos

Exercício A.49

Considere dois semi-planos infinitos unidos ao longo do eixo dos z e que fazem um ângulo α entre eles. Um plano está ao potencial $V = 0$ e o segundo está ao potencial $V = 100V$. Ao longo da linha de contacto entre os planos estes estão isolados eletricamente. Na região entre os planos não há cargas e a equação de Poisson reduz-se à equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$

- Usando coordenadas cilíndricas considere que o potencial não depende nem de r nem de z e obtenha o campo elétrico na região entre os planos.

NB: Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) a equação de Laplace escreve-se:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Nestas coordenadas o operador gradiente escreve-se

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

A.6.3 Potencial e Campo de esferas ocas e concêntricas

Exercício A.50

Duas esferas condutoras, ocas e concêntricas, de raios $r_1 = 2\text{ cm}$ e $r_2 = 6\text{ cm}$ são carregadas até atingirem potenciais $V_1 = 6\text{ V}$ e $V_2 = 1\text{ V}$.

- Deduza a expressão para o potencial $V = V(r)$ para as seguintes regiões:
(i) $r < r_1$; (ii) $r_1 < r < r_2$; (iii) $r_2 < r$
- Determine o campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(r)$ nas regiões indicadas pela alínea anterior. Devem-se esperar descontinuidades no campo \vec{E} ? Porquê?
- Calcule as cargas Q_1 e Q_2 colocadas em cada esfera.
- Determine a capacidade C deste sistema visto como um condensador.

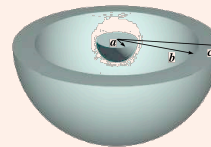
NB: Em coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \\ \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) \end{array} \right.$$

A.6.4 Duas Esferas Concêntricas**Exercício A.51**

Considere duas esferas concêntricas: uma maciça, de vidro, de raio $a = 5\text{ cm}$, e outra oca, de prata, de raios $b = 20\text{ cm}$ e $c = 25\text{ cm}$. Sendo o campo elétrico \vec{E} , a 10 cm do centro, radial e dirigido para o centro, com magnitude $3.6 \times 10^2 \frac{\text{N}}{\text{C}}$, e a 50 cm do centro radial e dirigido para o exterior, de magnitude $2. \times 10^2 \frac{\text{N}}{\text{C}}$, determine:

- A carga Q_{Si} da esfera de vidro.
- A carga Q_{Ag} da esfera oca de prata.
- A carga total em cada uma das superfícies interna e externa da esfera de prata.
- O potencial V_{Ag} a que se encontra a esfera de prata.

**A.7 Radiação e Campo Eletromagnético****A.7.1 Potencial Vetor e Gauge****Exercício A.52**

Determine um Potencial Vetor $\vec{A}(\vec{r})$ para o campo $\vec{B} = z \vec{e}_x + x \vec{e}_z$. Mostre que não é único apresentando outro $\vec{A}(\vec{r})$ para o mesmo campo, mas tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

A.7.2 Campo Eletromagnético de Onda Plana**Exercício A.53**

Uma fonte monocromática longínqua emite radiação com uma potência P_o . Assumindo que a radiação recebida à distância r da fonte se comporta como uma onda plana, determine as magnitudes dos campos elétrico e magnético.

A.7.3 Vetor de Poynting

Exercício A.54

Um condutor de tungsténio de comprimento $l = 10\text{ cm}$, raio $r = 1\text{ mm}$ e resistividade $\Sigma = 5.6 \times 10^{-8}\ \Omega\text{ m}$ é percorrido por uma corrente $I = 0.5\text{ A}$.

- Determine o vetor de Poynting \vec{S} à superfície do condutor.
- Calcule o fluxo de energia através da superfície do condutor.
- Sabendo que o calor específico do tungsténio (peso molecular 184 g/mol , densidade $\rho = 19.3$) é $c_p = 3.21 \times 10^{-2}\ \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$, determine a taxa de variação de temperatura do condutor se este estiver termicamente isolado.
- Se assumirmos que a única maneira de o condutor dissipar energia térmica é por radiação, escreva a equação que governa este processo. Lembre-se que a resistividade do tungsténio varia com a temperatura (o valor referido é para $T = 20^\circ\text{C}$) com um coeficiente $\alpha = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} = 4.5 \times 10^{-3}\ \text{C}^{-1}$ e que a potência total emitida por unidade de área de um corpo negro à temperatura T é dada pela lei de Stefan-Boltzmann $W_{\text{tot}}(T) = \sigma T^4$, onde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-4}$.

A.7.4 Cilindro oco, não condutor

Exercício A.55

Um cilindro oco, não-condutor, de raio R e comprimento $l \gg R$, tem na sua superfície uma carga Q uniformemente distribuída. Um binário exterior faz o cilindro rodar em torno do seu eixo com uma aceleração angular constante α .

- Determine o campo \vec{B} dentro do cilindro.
- Determine o campo \vec{E} na superfície interior do cilindro.
- Determine o vetor de Poynting \vec{S} e o fluxo de energia para dentro do cilindro.

A.7.5 Energia Radiante Solar

Exercício A.56

A Terra recebe aproximadamente 1.5 kW m^{-2} de potência radiante vinda do Sol.

- Qual é a potência total emitida pelo Sol, supondo que ele radia isotropicamente?
- Qual é a potência total recebida pela Terra (raio da Terra $R = 6.4 \times 10^3\text{ Km}$)?
- Se a massa solar ($M_\odot = 2 \times 10^{30}\text{ Kg}$) for completamente convertida em energia radiante de acordo com a fórmula $E = mc^2$ com uma eficiência de 1%, durante quanto tempo poderia o Sol emitir à taxa presente ?

A.7.6 Irradiação Solar

Exercício A.57

A constante solar $G_s = 1.353\ \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$ representa a potência por unidade de área da radiação solar incidente à superfície da atmosfera terrestre. Sabendo que os diâmetros do Sol e da Terra são respetivamente $D_s = 1.39 \times 10^6\text{ Km}$ e $D_T = 1.29 \times 10^4\text{ Km}$, e a distância média Terra-Sol $d_{TS} = 1.5 \times 10^8\text{ Km}$

- (a) Determine a potência total emitida pelo Sol
- (b) Qual a temperatura superficial do Sol, se este for considerado um corpo negro.
- (c) Em que comprimento de onda λ é que o Sol emite mais radiação?
- (d) Assumindo que a Terra também é um corpo negro, estime a temperatura superficial na Terra quando o Sol é a sua única fonte de energia.s

A.8 Correntes Elétricas e Forças

A.8.1 Resistência, Corrente e Voltagem

Exercício A.58

Quando se liga uma bateria de voltagem V desconhecida e resistência interna desprezável a uma resistência R , um amperímetro no circuito indica $I = 4A$. Quando se liga em série com R uma resistência adicional de 10Ω , a corrente passa para $I' = 3A$. Determine os valores desconhecidos V e R .

A.8.2 Circuito Resistências em Paralelo

Exercício A.59

Um circuito consiste em três resistências em paralelo, R_1 , R_2 e R_3 . Se se colocarem baterias entre R_1 e R_2 , com *f.e.m.* ϵ_1 , e entre R_2 e R_3 com *f.e.m.* ϵ_2 de sinal oposto, determine as correntes I_1 , I_2 e I_3 que atravessam cada resistência.

A.8.3 Correntes e Dissipação Ohmicas

Exercício A.60

Sabendo que $1 \text{ cal} \approx 4.2 \text{ J}$, quanto tempo deve esperar para aumentar de 1° C a temperatura de um recipiente com 1 l de água a 15° C submergindo uma resistência $R = 1 \text{ k}\Omega$ e ligando-a um gerador com uma força eletromotriz $\epsilon = 100 \text{ V}$?

A.8.4 Tempo de Carga de Condensador

Exercício A.61

Um condensador constituído por placas circulares de raio 2 cm , separadas por um dielétrico de permissividade $\epsilon = 9 \times 10^{-12} \text{ N m}^2 \text{ A}^{-2} \text{ s}^{-1}$ e espessura $d = 1 \text{ mm}$, está a ser carregado com uma corrente $I = 100 \text{ mA}$.

- (a) Determine o tempo que leva a carregar o condensador até $V = 100 \text{ V}$.
- (b) Determine a corrente que percorre o circuito em função do tempo se, uma vez carregado, o condensador se descarregar através de uma resistência $R = 1 \text{ k}\Omega$. Quanto tempo leva a perder 99% da carga inicial ?

A.8.5 Relâmpago

Exercício A.62

Uma nuvem numa tempestade desenvolve uma carga negativa de 100 C , induzindo no solo uma carga positiva igual. Um relâmpago neutraliza estas cargas, sendo tipicamente uma corrente de 2 ms de duração que tem uma subida rápida, decrescendo depois gradualmente.

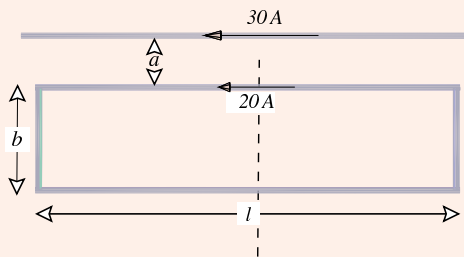
- Determine neste caso a corrente média do relâmpago.
- Se o tempo de subida for $\tau = 2\ \mu\text{s}$ para uma corrente $I = 10^4\text{ A}$ através dum condutor com uma auto-indução $L = 10^{-3}\text{ H}$ (unidades SI), calcule a tensão através desse condutor, sabendo que a sua resistência é $R = 10^{-2}\ \Omega$.

NB: A auto-indução L de um condutor é a relação entre o fluxo magnético e a intensidade de corrente que o atravessa: $L = \frac{\Phi}{I}$.

A.8.6 Força de Lorentz**Exercício A.63**

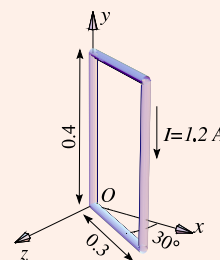
A figura mostra uma espira retangular e um fio infinito situados no mesmo plano. As correntes que percorrem o fio e a espira são respetivamente iguais a 30 A e 20 A .

- Calcule o valor da força resultante que atua sobre o fio. Considere $a = 1\text{ cm}$, $b = 8\text{ cm}$ e $l = 30\text{ cm}$.

**A.8.7 Espira Retangular Rodando em Campo Magnético****Exercício A.64**

Uma espira retangular (fig. 1) tem dimensões $0.4\text{ m} \times 0.3\text{ m}$. O plano da espira forma um ângulo de 30° com o eixo dos xx , e pode rodar em torno de Oy .

- Qual a grandeza do binário exercido sobre a espira por um campo magnético \vec{B} uniforme, de 0.8 T , que tem o sentido dos xx positivos, quando a corrente I na espira tem o valor de 1.2 A e o sentido indicado na figura?
- Qual o sentido de rotação da espira?
- Quais as forças que atuam nos outros dois lados da espira?

**A.8.8 Campo Magnético em Condutor Cilíndrico com Corrente**

Exercício A.65

Um condutor cilíndrico de raio R é percorrido por uma corrente I de densidade uniforme.

- Escreva as expressões para o campo \vec{B} dentro e fora do cilindro.
- Se este condutor tivesse um buraco cilíndrico de raio $r < R$, com eixo à distância b do condutor, determine o campo \vec{B} em todas as regiões.

A.8.9 Campo Magnético de Corrente Plana**Exercício A.66**

Um condutor plano de largura L é atravessado, no sentido longitudinal, por uma corrente I .

- Determine o campo magnético criado por esta geometria.
- Se $\vec{J} = J_x \vec{e}_y$, e existir um campo magnético exterior $\vec{B} = B_0(x \vec{e}_x + \vec{e}_z)$, determine a força e torque por unidade de comprimento no condutor.

A.8.10 Campo Magnético de cilindro oco**Exercício A.67**

Um cilindro oco de raio R tem uma densidade superficial de carga σ uniforme.

- Determine o campo elétrico e magnético em todo o espaço.
- Se o cilindro rodar em torno do seu eixo com uma velocidade angular ω , como se alteram os campos da alínea (a)?
- O eixo do cilindro é um tubo de raio r , ligado ao cilindro exterior por um braço condutor radial. Explique o que é que acontece nas condições da alínea (b). Determine os campos no equilíbrio.
- Que efeito teria uma corrente I percorrendo o cilindro exterior no sentido axial?

A.8.11 Binário em Momento Magnético**Exercício A.68**

Uma pequena barra magnética com um momento magnético de 50 Am^2 está situado a 50 cm dum condutor retilíneo longo, o qual conduz uma corrente de 50 A .

- Determine o binário na barra se esta estiver paralela ao fio.
- Determine o binário na barra se esta estiver perpendicular ao fio.

A.8.12 Força de Eletromagnete**Exercício A.69**

Um eletromagnete em forma de ferradura suporta uma barra de ferro ($\mu_r = 5000$), sendo o contacto feito pelas extremidades do magnete através de uma folha de cobre fina ($\mu_r = 0.999991$). Se o fluxo magnético no circuito for de $\Phi = 15 \text{ mWb}$, e a área de contacto for de 0.015 m^2 por cada polo,

- (a) qual é o máximo peso que a barra pode ter para ser suportada pelo magnete?
- (b) Se a área de contacto for reduzida para 0.005 m^2 afiando as extremidades do núcleo do ferromagnete, qual é agora o peso máximo suportável pelo magnete ?
- (c) Qual é a pressão de contacto nas duas alíneas anteriores ?

A.8.13 Força entre Magnetes

Exercício A.70

Mostre que a força entre dois pequenos magnetes é proporcional ao inverso da quarta potência da distância que os separa e é independente da sua orientação relativa.

A.8.14 Betatrão

Exercício A.71

A densidade de fluxo média dentro da órbita de um eletrão num Betatrão é $\vec{B} = 60 e^{i\omega t} \text{ mT}$, onde $\omega = 2\pi \times 60 \text{ rads}^{-1}$. Se o raio da órbita é $r = 120 \text{ mm}$ determine:

- (a) A velocidade dos eletrões ao fim de 1 ms se $v \approx 0$ inicialmente.
- (b) A energia por unidade de carga fornecida em cada revolução.
- (c) O número de revoluções num milissegundo.
- (d) A energia dos eletrões ao fim dum milissegundo.

A.9 Condições Fronteira

A.9.1 Condições Fronteira de Campo Magnético na Matéria

Exercício A.72

Duas cavidades são cortadas numa substância ferromagnética ($\mu_r = 200$) extensa, e cheias com ar. A primeira é em forma de disco com as faces planas orientadas perpendicularmente à direção de \vec{B} no ferromagnete. A segunda é da forma de uma agulha comprida com eixo paralelo a \vec{B} . Se $|\vec{B}| = 2 \text{ T}$ qual é a magnitude de \vec{H} no centro das cavidades?

A.9.2 Condições Fronteira de Campo Magnético e Corrente Superficial

Exercício A.73

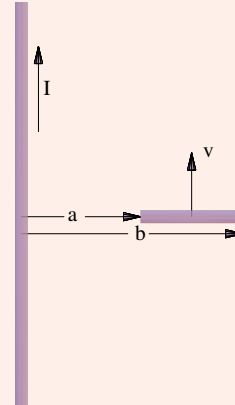
Uma folha condutora separa dois meios com campos $\vec{B}_1 = 5 \text{ mT}$ e $\vec{B}_2 = 20 \text{ mT}$, orientados em direções opostas paralelas à folha. Sabendo as permeabilidades magnéticas relativas $\mu_{r1} = 50$ e $\mu_{r2} = 100$, determine a magnitude e direção da corrente superficial \vec{j}_s na folha.

A.10 Correntes e Campos

Exercício A.74

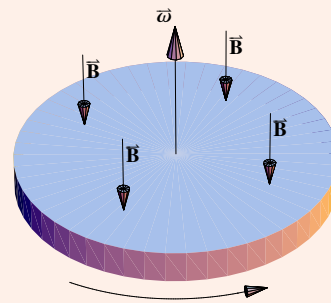
Um fio retilíneo percorrido por uma corrente estacionária I . Ao lado, desloca-se paralelamente uma barra com velocidade v . Calcule a diferença de potencial que aparece entre as extremidades da barra. Em que extremidade se acumulam as cargas positivas?

$$\text{(Resp:)} \quad \mathcal{V} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



Exercício A.75

O disco da figura (disco de Faraday) gira com uma velocidade angular $\vec{\omega}$ ($\frac{rad}{s}$). Calcule a diferença de potencial que aparece entre o centro e a periferia do disco, na presença de um campo magnético uniforme e constante, de indução \vec{B} , perpendicular ao disco.



Exercício A.76

Considere uma molécula representada, classicamente, por um simples oscilador harmónico de frequência própria ω_0 , massa m e carga q . O sistema oscila no plano (x, y) . Determinar a(s) frequência(s) de oscilação na presença de um campo magnético uniforme e constante, paralelo ao eixo dos z . (Este modelo simples dá-nos uma representação clássica do conhecido efeito de Zeeman, desdobramento das riscas espectrais, na presença de um campo magnético exterior).

Exercício A.77

Estimar a frequência para a qual a água do mar apresenta uma corrente de deslocamento da mesma ordem de grandeza da corrente de condução.

NB: Para a água tem-se: $\sigma_c = 5 \times 10^{-3} \left(\frac{S}{m}\right)$, $\epsilon_r = 80$.

$$\text{(Resp:)} \quad f \approx 1.2 MHz$$

Exercício A.78

Considere um condutor em forma de um anel de raio r e resistência \mathcal{R} , colocado num plano perpendicular ao eixo dos z , na presença dum campo magnético, cuja indução é dada por $\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\omega t) \vec{k}$. Calcule a expressão da f.e.m. e diga qual o sentido da corrente induzida quando $t = 0$.

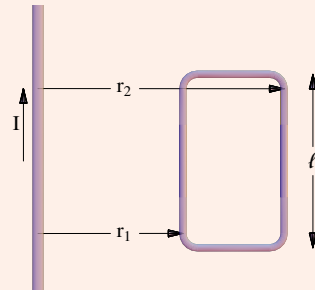
Exercício A.79

Calcular o coeficiente de auto-indução \mathcal{L} de uma bobina com N espiras, de comprimento L . (Desprezar os efeitos de fugas.)

Exercício A.80

Calcule o coeficiente de indução mútua \mathcal{M} entre o fio retilíneo infinito e o retângulo, colocado paralelamente ao fio, representados na figura ao lado.

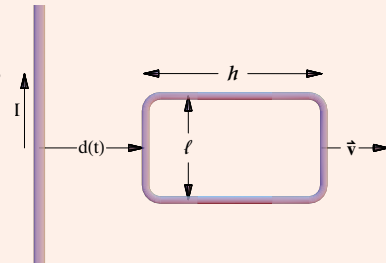
(Resp:)
$$\mathcal{M} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$



Exercício A.81

Dado o esquema ao lado, calcular a f.e.m. induzida no retângulo quando este se desloca com velocidade v , mantendo-se coplanar com o fio. Seja D o valor de $d(t)$ em $t = 0$. Qual o sentido da corrente gerada?

(Resp:)
$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\ell v h}{(D + vt + h)(D + vt)}$$



Exercício A.82

Uma espira quadrada, de lado a e resistência \mathcal{R} , desloca-se com uma velocidade \vec{v} constante, através de uma região finita onde existe um campo uniforme \vec{B} , criado por um eletroímã. Mostre que, ao entrar ou sair da região onde existe o campo magnético, a espira fica sujeita a uma força \vec{F} de sentido oposto ao movimento e de grandeza proporcional a v .

(Resp:)
$$\vec{F} = -\frac{B^2 a^2}{\mathcal{R}} \vec{v}$$

Exercício A.83

Suponhamos que no problema anterior a espira tem massa m e que está a cair, sob a ação da gravidade, entre os polos do eletroímã que cria o campo \vec{B} , suposto horizontal. Qual a velocidade limite atingida?

$$\text{(Resp:)} \quad v_{lim} = \frac{mgR}{B^2 a^2} \quad \left(\frac{m}{s}\right).$$

Exercício A.84

Um condutor de forma retangular, com lados a e b , gira com velocidade angular ω em torno de um eixo coincidente com o eixo coordenado Ox , na presença de um campo magnético de indução $\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\omega t) \vec{e}_y$. Calcule a f.e.m. induzida no retângulo, supondo que a normal ao retângulo fazia, quando $t = 0$, um ângulo θ com o eixo dos y .

A.11 Ondas Eletromagnéticas**A.11.1 Ondas Planas, Refração, Leis de Fresnel****Exercício A.85**

Dada a onda plana

$$\vec{H} = 3 \times 10^{-4} \cos\left(5 \times 10^4 t - 6 \times 10^{-4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y\right)\right) \vec{k} \quad \left(\frac{A}{m}\right)$$

indicar a direção e velocidade de propagação, e calcular a constante dielétrica do meio ($\mu_r = 1$).

Exercício A.86

Mostre que $u(x, t) = u_0 \sin(\omega t) \sin(kt)$ é solução da equação de ondas e que representa a sobreposição de duas ondas de igual amplitude, propagando-se em sentidos opostos ao longo do eixo dos x . Essa solução é uma onda estacionária, apresentando nodos fixos ao longo de x . Qual a posição desses nodos?

Exercício A.87

No caso de campos variáveis continuaremos a utilizar as condições fronteira $E_1^T = E_2^T$ e $H_1^T = H_2^T$ quando $J = 0$, embora os rotacionais de \vec{E} e \vec{H} sejam diferentes de zero. Mostre que é correta essa utilização.

Exercício A.88

É conhecido o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ em $\left(\frac{V}{m}\right)$ de uma onda plana propagando-se num meio dielétrico ($\mu_r = 1$) com as seguintes componentes:

$$E_x = 0$$

$$E_y = -0.4 \times 10^{-9} \cos\left(5 \times 10^5 t - 2 \times 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y + \frac{\sqrt{2}}{2} z\right)\right)$$

$$E_z = +0.4 \times 10^{-9} \cos\left(5 \times 10^5 t - 2 \times 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y + \frac{\sqrt{2}}{2} z\right)\right)$$

- Qual a direção e sentido da onda?
- Qual o índice de refração do meio?
- Qual o comprimento de onda?
- Qual a sua polarização?
- Determine a expressão do campo magnético \vec{H} .

Exercício A.89

Uma onda e.m. plana e monocromática, propagando-se no ar ($\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$), apresenta um campo elétrico definido por

$$\vec{E} = E_o \cos(\omega t - k \vec{n} \cdot \vec{r}) \vec{e}_y$$

com $E_o = 0.2 \left(\frac{V}{m}\right)$ e $\omega = 2\pi \times 10^6 \left(\frac{rad}{s}\right)$. Esta onda incide sobre uma superfície plana de um dielétrico com $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1$, segundo um ângulo $\theta_i = 30^\circ$.

- Escreva as expressões para os campos elétrico e magnético das ondas incidente, refletida e transmitida,
- Mostre ainda que a energia que incide por segundo, por unidade de área, sobre a superfície do dielétrico é igual à soma das energias das ondas refletida e transmitida.

Exercício A.90

Derive as equações de Fresnel para o caso em que o campo elétrico da onda incidente é paralelo ao plano de incidência.

Exercício A.91

Considere um meio condutor e a lei de Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. Mostre que a equação de ondas correspondente admite uma solução da forma $u = u_o e^{i\omega t - \Delta z}$. Determine $\Delta = a + ib$ e interprete o resultado em termos de um índice de refração complexo.

Exercício A.92

Pegue num copo de água, junte-lhe umas (poucas) gotas de leite, e faça incidir a luz

de uma lanterna sobre a superfície do copo. Poderá verificar que as ondas transmitidas são levemente avermelhadas e as ondas refletidas levemente azuladas. Tente explicar este resultado utilizando o modelo simples para um dielétrico como uma coleção de pequenos osciladores, com frequência própria ω_0 . Poderá tomar o coeficiente de dissipação $\gamma \approx 0$.



B. Bibliografia

Artigos

- [4] M. V. Berry e A. K. Geim. «Of flying frogs and levitrons». Em: *European Journal of Physics* 18.4 (1997), página 307.
- [5] M. Born e L. Infeld. «Foundations of the New Field Theory». Em: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 144.852 (1934), páginas 425–451.
- [40] J. A. Wheeler e R. P. Feynman. «Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation». Em: *Reviews of Modern Physics* 17 (abr. de 1945), páginas 157–181.
- [9] S. Errede. *The Lorentz Transformation of E and B Fields*. 2011.

Livros

- [1] P. C. Abbott. *Electromagnetism (with Mathematica)*. 2010.
- [3] H. H. Barrett e K. J. Myers. *Foundations Of Image Science*. John Wiley & Sons, 2013.
- [6] K. Buschow. *Physics Of Magnetism And Magnetic Materials*. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.
- [7] D. K. Cheng. *Field And Wave Electromagnetics*. Reading, Mass.: Addison Wesley, 1983.
- [8] V. Cooray. *Lightning Electromagnetics*. [S.l.]: Inst Of Engineer & Techn, 2011.
- [10] L. W. Fagg. *Electromagnetism: Nature'S Force That Shapes Our Lives*. Nottingham: Nottingham University Press, 2011.
- [11] J. A. B. Faria. *Electromagnetic Foundations Of Electrical Engineering*. Chichester, U.K.: Wiley, 2008.
- [12] R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. L. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, 1 de jan. de 1989. 1552 páginas.

- [13] R. Fitzpatrick. *Classical Electromagnetism*. 1997.
- [14] M. Fujimoto. *Physics Of Classical Electromagnetism*. New York: Springer, 2007.
- [15] D. C. Giancoli. *Solutions Manual for Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics*. 4ª edição. Addison-Wesley, 2009.
- [16] D. C. Giancoli. *Physics for scientists & engineers with modern physics*. 4. ed., new internat. ed. Harlow: Pearson Education, 2014. 1426 páginas.
- [17] W. Greiner. *Classical Electrodynamics (Greiner)*. Springer, 1998. 572 páginas.
- [18] D. J. Griffiths. *Introduction To Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999. 600 páginas.
- [20] J. Jackson. *Classical Electrodynamics (Jackson)*. 3rd ed. New York: Wiley, 1999.
- [21] O. Jefimenko. *Electricity and Magnetism: An Introduction to the Theory of Electric and Magnetic Fields*. 1998.
- [22] P. Kok. *Advanced Electrodynamics*. The University of Sheffield, 2014.
- [23] H. L. König, A. P. Krueger, S. Lang e W. Sönning. *Biologic Effects of Environmental Electromagnetism*. Redigido por K. E. Schaefer. Topics in Environmental Physiology and Medicine. New York, NY: Springer New York, 1981.
- [24] J. D. Kraus e K. R. Carver. *Electromagnetics*. McGraw-Hill, 1973.
- [25] W. H. T. Loh. *Jet, Rocket, Nuclear, Ion and Electric Propulsion*. Editado por W. H. T. Loh. Volume 7. Applied Physics and Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968.
- [26] P. Lorrain e D. R. Corson. *Electromagnetic Fields & Waves*. 3 Sub. W.H. Freeman & Company, dez. de 1987. 754 páginas.
- [27] P. Lorrain e D. Corson. *Electromagnetism: Principles And Applications, Solutions Manual*. W.H. Freeman, 1979.
- [28] P. Lorrain e D. R. Corson. *Electromagnetism: Principles And Applications*. San Francisco: W. H. Freeman, 1979. 507 páginas.
- [29] R. Magyar. *Companion to J.D. Jackson's Classical Electrodynamics*. 3ª edição. 2001.
- [30] Mulders e Ubachs. *The Structure Of Matter*. 2003.
- [31] H. Neff. *Introductory Electro-Magnetics*. [S.l.]: Wiley, 1991.
- [32] T. Padmanabhan. *Sleeping Beauties in Theoretical Physics*. Volume 895. Lecture Notes in Physics. Cham: Springer International Publishing, 2015.
- [33] R. L. Paul A. Tipler. *Instructor's Solutions Manual to Modern Physics*. 6th. W.H. Freeman, 2012.
- [34] Z. B. Popović e B. D. Popović. *Introductory Electromagnetics*. Prentice Hall, 2000. 556 páginas.
- [35] Z. Popović e B. D. Popović. *Introductory Electromagnetics - Practice Problems and Labs*. Prentice Hall, 2007.
- [36] J. R. Reitz, F. J. Milford e R. W. Christy. *Foundations Of Electromagnetic Theory*. Pearson/Addison-Wesley, 19 de mai. de 2008. 630 páginas.
- [37] R. A. Serway e J. W. Jewett. *Physics for scientists and engineers*. Thomson/Brooks/Cole, 2004. 800 páginas.
- [38] P. A. Tipler e R. A. Llewellyn. *Modern physics*. 6th ed. New York: W. H. Freeman e Co, 2012. 1 página.

- [39] J. Walker, R. Resnick e D. Halliday. *Fundamentals of physics*. 10th edition. Hoboken, NJ: Wiley, 2014. 1 página.

Coletâneas

- [2] R. Bansal, editor. *Handbook Of Engineering Electromagnetics*. New York: Marcel Dekker, 2004. 706 páginas.
- [19] W. Haynes. «Magnetic susceptibility of the elements and inorganic compounds». Em: *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. 94th. CRC Press, 2013, páginas 4–131.



Índice

D

Dipolo Elétrico 89

M

Momento
Magnético 200

T

Transformação do Campo Electromagnético 92